

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 5675

THÈSES

DE DOCTORAT D'ÉTAT

ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PAR

André ZAOUÏ

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES

1^{re} THÈSE. — Étude de l'influence propre de la désorientation des grains sur le comportement viscoplastique de métaux polycristallins (système C.F.C.).

2^e THÈSE. — Distributions continues de dislocations : théorie générale et application aux effets magnétoélastiques. (Propositions données par la Faculté).

Soutenues le 22 septembre 1970 devant la Commission d'examen

MM. R. SIESTRUNCK. *Président*

J. FRIEDEL.... }
J. MANDEL.... } *Examineurs.*

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE
1972



Digitized by the Internet Archive
in 2026

AVANT-PROPOS

Je prie M. le Professeur SIESTRUNCK qui m'a constamment soutenu de ses conseils et de ses encouragements et m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, ainsi que M. le professeur FRIEDEL qui a bien voulu s'intéresser à mon travail et participer au jury, d'accepter l'expression de ma respectueuse gratitude.

Ma reconnaissance va tout particulièrement à M. le professeur MANDEL, mon maître et mon directeur de recherche, à qui je dois toute ma formation de chercheur. Je le remercie également en tant que directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides de l'École polytechnique, où ce travail a été effectué sous les auspices du C.N.R.S., ainsi que M. HABIB, directeur adjoint, pour les excellentes conditions de travail qu'ils m'ont assurées.

J'adresse également mes remerciements à MM. RADENKOVIC et VERNET, directeurs de Recherche au Laboratoire, pour leurs critiques et conseils fructueux, ainsi qu'à tous mes collègues et amis, chercheurs — en particulier L. BRUN et C. HUET qui ont guidé mes premiers pas dans la recherche —, secrétaires, techniciens et employés du laboratoire, sans qui ce travail n'aurait pu être mené à bien.

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A.O. 5675

THÈSES

DE DOCTORAT D'ÉTAT

ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PAR

André ZAOUÏ

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES

1^{re} THÈSE. — Étude de l'influence propre de la désorientation des grains sur le comportement viscoplastique de métaux polycristallins (système C.F.C.).

2^e THÈSE. — Distributions continues de dislocations : théorie générale et application aux effets magnétoélastiques. (Propositions données par la Faculté).

Soutenues le 22 septembre 1970 devant la Commission d'examen

MM. R. SIESTRUNCK. *Président*

J. FRIEDEL }
J. MANDEL } *Examineurs.*

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE
1972



ÉTUDE DE L'INFLUENCE PROPRE DE LA DÉSORIENTATION DES GRAINS SUR LE COMPORTEMENT VISCOPLASTIQUE DE MÉTAUX POLYCRISTALLINS (SYSTÈME C.F.C.)

*(A study of the peculiar effect of grain orientation
misfit on the viscoplastic behaviour of polycrystalline F.C.C. metals)*

*(Eine Untersuchung über den Eigeneinfluss der Unorientierung der
Körner auf das viskoplastische Benehmen der vielkristallischen
Metalle (K. F. Z. System))*

par

A. ZAOUI ⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — *L'étude porte sur la détermination théorique et expérimentale de certaines particularités du comportement viscoplastique de métaux polycristallins qui sont liées à la désorientation des grains contigus et aux contraintes internes qui en résultent. On commence par examiner l'évaluation de ces contraintes internes : à partir de l'étude critique du modèle de KRÖNER dans le cas de l'écoulement viscoplastique, et du calcul des contraintes internes dans un agrégat isotrope de cristaux sphériques dans le cas de la visco-élasticité linéaire anisotrope, on propose une loi semi-empirique d'interaction, qui tient compte de la relaxation des contraintes internes au cours de l'écou-*

⁽¹⁾ Attaché de recherche au C.N.R.S., Laboratoire de Mécanique des Solides, École polytechnique, Paris.

lement viscoplastique. Sur cette base, on construit un modèle statistique polycristallin (C.F.C.), pour une distribution isotrope de l'orientation des grains et dans l'hypothèse du glissement simple de type BINGHAM : on étudie la réponse de ce modèle à différentes sollicitations en traction simple, et on met à jour un effet d'« entraînement » visqueux au glissement plastique des grains bloqués par les grains actifs, effet qui se manifeste en particulier par la propriété d'hésitation au fluage, en réponse à une décharge partielle en cours de fluage. L'étude expérimentale sur fils de cuivre permet d'observer directement ces phénomènes, d'étudier l'influence de divers paramètres, de déterminer la loi semi-empirique d'interaction entre les grains, et de retrouver à partir de là pour le modèle d'autres propriétés dégagées par l'expérience.

SUMMARY. — This paper is concerned with the theoretical and experimental determination of some characteristics of viscoplastic behaviour for polycrystalline metals, which are linked with the orientation misfit of adjoining grains and with the resulting internal stresses. First, the valuation of these internal stresses is examined : from the critical study of KRÖNER's model, when viscoplastic flow occurs, as well as from the calculation of the internal stresses in an isotropic aggregate of spherical crystals in the case of linear anisotropic viscoelasticity, a semi-empirical interaction law is proposed, which takes the relaxation of internal stresses during the viscoplastic flow into account. Then, a statistical FCC polycrystalline model is built upon this basis, when an isotropic grain orientation distribution is assumed, and in the case of BINGHAM's type single glide : the response of this model to various loadings in simple tension is studied, and a « dragging » viscous effect is brought out, by which active grains cause the plastic glide of inactive ones; this effect, especially, is responsible for the property of « creep-hesitation » which occurs after a partial unloading during creep. An experimental study on copper wires leads to a direct observation of the phenomena; it enables to study the influence of various parameters and to determine the interaction law. As a result, some other experimental properties are proved to be exhibited by the model too.

ZUSAMMENFASSUNG. — Diese Arbeit betrifft die theoretische und experimentelle Bestimmung von einigen Eigenschaften des viskoplastischen Benehmens der vielkristallinen Metalle, die mit der Unorientierung der angrenzenden Körner und mit den Eigenspannungen die dabei erfolgen verbinden sind. Zum Anfang, erforscht man die Berechnung von diesen Eigenspannungen : von dem kritischen Studium des KRÖNER Modelles im Fall des viskoplastischen Fliessens, und von den Berechnungen der Eigenspannungen in einem isotropen Agregat aus sphärischen Kristallen im Fall der linearen anisotropen Viskoelastizität ausgehend, versucht man ein semi-empirisches Wechselwirkungsgesetz, das die inneren Spannungen im Laufe des viskoplastischen Fliessens richtig berücksichtigt. Dann, auf diesem Grunde, ein

statistisches vielkristallisches (K.F.Z.) Modell für isotrope Verteilung der Körnerrichtungen mit der Hypothese des einfachen Gleitens BINGHAM'scher Art gebaut wird : man untersucht das Benehmen dieses Modelles unter verschiedenen Beanspruchungen im einfachen Zug, und man gibt so zu erkennen das viskoplastische « Mitschleppen » der blockierten Körner durch die Aktivkörner. Dieser Effekt äussert sich besonders durch das « Kriechen-Zaudern » das durch eine Teilentladung im Laufe des Kriechens bewirkt wird. Die Versuche auf Kupfer-Drähten erlaubten dieses Phänomen direkt zu beobachten, den Einfluss verschiedener Parametern zu untersuchen, das semi-empirische Wechselwirkungsgesetz zwischen den Körnern zu bestimmen, und daraus einige andere Eigenschaften festzustellen die das Modell abbildet.

INTRODUCTION

Cette étude a pour objet de déterminer les particularités du comportement viscoplastique des métaux polycristallins qui sont liées directement à la présence dans le matériau de grains contigus d'orientation différente. En effet l'écoulement plastique dans un cristal ne se fait que suivant certains systèmes de glissement, liés à la géométrie du cristal; la déformation plastique n'est pas compatible, et cette incompatibilité est source de contraintes internes. Bien que le système de ces contraintes internes soit nul en moyenne, il entraîne certaines propriétés pour le polycristal qui n'existent pas dans le monocristal, et qui font que le comportement du polycristal ne peut être considéré comme celui d'un monocristal « moyen ». Ce sont ces effets propres qui sont l'objet de cette étude, dans le cas de la viscoplasticité.

La question décisive est donc celle de l'évaluation des contraintes internes à partir de la distribution des déformations plastiques. Cette question n'a en fait été résolue de façon satisfaisante que dans des cas extrêmes (très faibles déformations plastiques ou distribution sensiblement homogène pour un état de contrainte homogène). Le premier pas sera donc la critique des différents modèles et la proposition d'une évaluation mieux approchée des contraintes propres à partir de l'étude complète d'un cas simple (viscoélasticité anisotrope).

Une fois admise la « loi d'interaction », le comportement du polycristal s'obtient à partir de celui du monocristal par la résolution d'un problème statistique d'évaluation de valeur moyennes — la loi d'interaction introduisant une « contrainte » entre les valeurs locales et les valeurs moyennes — si l'on se donne une loi de comportement viscoplastique du monocristal, — et une loi de distribution des orientations des différents cristaux.

Précisons déjà que, dans l'optique de notre étude, à savoir celle de l'effet propre de la désorientation des grains, il suffit que la loi de comportement du monocristal soit *de type* viscoplastique. Nous n'avons pas en vue, en effet, de déterminer le comportement complet d'un polycristal donné, mais seule-

ment d'étudier, dans le cadre de la viscoplasticité, l'influence de la désorientation des grains.

Le plan de l'étude est le suivant :

PREMIER CHAPITRE

ÉVALUATION DES CONTRAINTES INTERNES

On étudiera principalement le modèle « self-consistent » et la formule correspondante de KRÖNER. On montrera que l'hypothèse de base de ce modèle revient à surestimer les contraintes internes en supposant purement élastiques les interactions entre les grains. On illustrera cela en faisant l'étude complète du fluage en traction simple pour un agrégat de cristaux viscoélastiques anisotropes. On s'inspirera de cet exemple pour proposer, enfin, une évaluation plus satisfaisante des contraintes internes dans le cas d'un polycristal en écoulement plastique (loi « modifiée »).

DEUXIÈME CHAPITRE

ÉTUDE D'UN MODÈLE STATISTIQUE POLYCRISTALLIN

On développera complètement l'étude du comportement, en traction simple, d'un modèle statistique polycristallin. On montrera, dans le cas de la mise en fluage et de la décharge partielle en cours de fluage, que la désorientation des grains est responsable de deux régimes distincts de fluage (« fluage partiel » et « fluage total ») ainsi que du phénomène « d'hésitation au fluage » (blocage et reprise, partiels ou totaux, de la déformation plastique après décharge partielle). On verra que l'expression de ces phénomènes diffère selon que l'on a admis la loi de KRÖNER ou la loi « modifiée ». On devra résoudre au passage le problème du calcul de la densité de probabilité du coefficient de cisssion sur le système de glissement principal (traction simple) pour les cristaux C.F.C.

TROISIÈME CHAPITRE

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DU COMPORTEMENT EN FLUAGE

Il s'agit de fils de cuivre polycristallin en traction simple et à température constante (26 °C); on étudie successivement les comportements suivants : fluage sous contrainte constante, surcharge ou décharge partielle en cours de fluage, fluage sous vibrations superposées à une contrainte constante, arrêt des vibrations ou mise en vibrations en cours de fluage... On compare chaque fois

es résultats expérimentaux et les prévisions d'après l'étude du modèle. L'accord qualitatif est bon, ce qui permet à la fois de souligner l'importance de la présence de contraintes internes dans le calcul du comportement des polycristaux, et de tester, par l'expérience, la validité de telle ou telle loi d'interaction – la loi modifiée donnant dans le cas présent un bien meilleur accord quantitatif avec l'expérience que la loi de KRÖNER.

On soulignera, enfin, l'intérêt pratique des phénomènes physiques mis à jour.

CHAPITRE I

ÉVALUATION DES CONTRAINTES INTERNES

Le premier problème est celui de l'évaluation des contraintes propres — ou contraintes internes — liées à l'incompatibilité de la déformation plastique.

D'une façon générale, et même à l'échelle du monocristal la déformation plastique n'est pas compatible; seule la déformation totale dérive d'un champ de déplacement. Ainsi, KRÖNER [1] a pu exprimer les contraintes propres en fonction de l'incompatibilité de la déformation plastique dans le cadre de la théorie continue (et statique) des dislocations. Nous nous plaçons ici à une *échelle différente* : nous négligeons les contraintes propres dues à l'incompatibilité de la déformation plastique dans le grain (déformation que nous supposons même homogène), pour ne tenir compte que de l'incompatibilité de la déformation plastique de *grain à grain*.

1. LES MODÈLES DE SACHS ET DE TAYLOR.

a. *Modèle de SACHS* : SACHS [2] a évalué le coefficient moyen de cisssion pour un assemblage isotrope de cristaux cubiques à faces centrées dans le cas de la traction simple. Il suppose que la cisssion dans le système de glissement principal est la même dans tous les grains, et égale à la cisssion critique τ_0 . Cela implique que le tenseur de contrainte dans chaque grain σ_{ij} soit homothétique du tenseur macroscopique Σ_{ij} , le rapport d'homothétie dépendant de l'orientation du grain — caractérisée par un paramètre m . Si σ est la contrainte principale de traction dans le grain, on a :

$$\sigma = m \tau_0$$

ou :

$$\sigma_{ij} = \frac{m \tau_0}{\Sigma} \Sigma_{ij}$$

SACHS évalue alors la valeur moyenne $\langle m \rangle$ de m sur tous les grains, dont l'orientation est supposée répartie de manière isotrope. Par extension, on désigne par « modèle de SACHS », un modèle qui exprime le polycristal comme monocristal moyen — c'est-à-dire le monocristal dont le coefficient d'orientation m est égal à la valeur moyenne $\langle m \rangle$.

Il sera commode d'introduire comme point de comparaison un modèle différent, dit « modèle statique » (par ce qu'il est statiquement admissible,

au contraire du modèle de SACHS), en supposant que l'état de contraintes est le même dans tous les grains, d'où :

$$(I.1) \quad \begin{cases} \sigma_{ij} = \Sigma_{ij} \\ \tau = \frac{\Sigma}{m} \end{cases}$$

Cela signifie qu'il n'y a pas de contraintes internes.

b. *Modèle de TAYLOR* : il s'agit en fait de la généralisation par LIN [3] du modèle de TAYLOR [4] et de BISHOP et HILL [5]. L'hypothèse de base est la suivante : chaque grain subit la même déformation totale homogène. Si l'on désigne en minuscules les quantités locales (σ_{ij} , ε_{ij} , ε'_{ij} , ε''_{ij}) et en majuscules les quantités macroscopiques moyennes, on peut exprimer cette hypothèse sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij} = E'_{ij} + E''_{ij} = E_{ij}$$

Or si l'on suppose l'élasticité isotrope et les déformations plastiques incompressibles on obtient :

$$(I.2) \quad \sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu (E'_{ij} - \varepsilon'_{ij})$$

où μ est le module élastique de cisaillement. Le modèle est cohérent puisque l'on trouve bien un système de contraintes propres nul en moyenne :

$$< \sigma_{ij} > = \Sigma_{ij}$$

si $< >$ désigne l'opérateur de moyenne.

Cependant on peut voir sur un exemple simple l'insuffisance de ce modèle. Considérons en effet le cas d'une inclusion sphérique plastique dans une matrice infinie élastique non chargée. Puisque $E_{ij} = 0$, on aura, suivant le modèle de TAYLOR : $\varepsilon'_{ij} = -\varepsilon''_{ij}$ d'où $\sigma_{ij} = -2\mu \varepsilon'_{ij}$. Or le calcul exact fait, par exemple, par ESHELBY [6], montre que cette évaluation est à peu près deux fois trop forte, puisque l'on devrait trouver dans ce cas :

$$\sigma_{ij} = -2\mu (1 - \beta) \varepsilon'_{ij}$$

où :

$$\beta = \frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \quad (\nu : \text{coefficient de POISSON}) \text{ soit } \beta \simeq \frac{1}{2}.$$

c. *Comparaison des modèles « statique » et de TAYLOR* : du fait que, pour le modèle de TAYLOR, la matrice impose sa propre déformation totale à l'inclusion, elle se comporte comme « rigide » vis-à-vis d'elle, ne se déforme pas localement autour de l'inclusion pour relâcher les contraintes internes, ce qui conduit à des contraintes propres beaucoup trop fortes. Ainsi, pour le modèle de TAYLOR, ni la déformation élastique, ni la déformation plastique de la matrice ne sont affectées par la présence de l'inclusion.

Le modèle « statique » présente le défaut inverse : toute différence disparaît entre la matrice et l'inclusion, d'où l'absence de contraintes internes.

C'est pourquoi le modèle « statique » fournit une évaluation des contraintes internes approchée par défaut, celui de TAYLOR en fournit une approchée par excès. D'autre part si le modèle « statique » est statiquement admissible, celui de TAYLOR est cinématiquement admissible.

2. LE MODÈLE DE KRÖNER (OU MODÈLE « SELF-CONSISTENT »).

Il a pour point de départ le calcul exact fait par ESHELBY [6] d'une inclusion déformée plastiquement dans une matrice infinie, élastique et isotrope, non chargée. Dans le cas où la matrice est elle-même un agrégat d'inclusions plastifiées, KRÖNER s'attache à obtenir une loi d'interaction qui conduise à un champ de contraintes internes autoéquilibré, nul en moyenne. En admettant une loi d'élasticité linéaire et isotrope, et en supposant l'incompressibilité plastique, il parvient [7] à la loi suivante, dite « loi de KRÖNER », dans le cas de cristaux sphériques (le facteur de forme intervenant peu) :

$$(I.3) \quad \sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2 \mu (1 - \beta) (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)$$

les notations étant les mêmes que précédemment.

BUDIANSKY et WU [8] justifient cette formule, à partir du raisonnement suivant qui explicite le modèle « self-consistent » : la déformation totale de l'inclusion résulte de la superposition :

— de la déformation élastique d'un matériau homogène soumis à la contrainte Σ_{ij} soit E_{ij} ;

— de la « déformation d'ESHELBY » induite par la déformation « libre de contrainte » (stress-free) : $[\varepsilon_{ij}^p - E_{ij}^p]$;

— de la déformation plastique uniforme E_{ij}^p .

Ainsi le modèle « self-consistent » — qui, comme son nom l'indique, est cohérent — suppose que la déformation plastique dans l'inclusion ε_{ij}^p est homogène, *ainsi que la déformation plastique dans la matrice* E_{ij}^p . Ainsi, selon ce modèle, *seule la déformation élastique de la matrice est affectée par la présence de l'inclusion, la déformation plastique ne l'étant pas (elle reste homogène).*

On voit déjà que, de ce point de vue, le modèle « self-consistent » est « intermédiaire » entre les modèles « statique » et de TAYLOR, et qu'il représente une meilleure prise en compte que les deux autres de l'interaction entre les différents grains.

Cependant le modèle de KRÖNER ne satisfait pas à la condition de HILL :

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle = \Sigma_{ij} E_{ij} \text{ pour } \Sigma_{ij} \text{ homogène [9]}$$

Il est d'ailleurs facile de voir que, de tous les modèles conduisant à une loi d'interaction du type :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2 \mu \chi (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)$$

seuls les modèles « statique » ($\chi = 0$) et de TAYLOR ($\chi = 1$) satisfont à une telle condition. On trouve en effet :

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle = \Sigma_{ij} E_{ij} + (\chi - 1) (\Sigma_{ij} E_{ij}'' - \langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}'' \rangle)$$

Or le deuxième terme du second membre de cette équation n'est nul que si :

$$\chi = 1 \quad (\text{modèle de TAYLOR})$$

ou $\Sigma_{ij} E_{ij}'' = \langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}'' \rangle$, ce qui comme il est facile de le montrer n'est vrai que pour le modèle « statique » (déformation plastique compatible, absence de contraintes internes).

3. REMARQUES SUR LE MODÈLE DE KRÖNER.

La principale insuffisance du modèle de KRÖNER en régime d'écoulement viscoplastique réside, comme on l'a déjà souligné, dans l'hypothèse de l'homogénéité de la déformation plastique en dehors de l'inclusion. Cette hypothèse aboutit donc à surestimer les contraintes internes puisque, dans leur évaluation, la matrice se voit affecter de caractéristiques purement élastiques : en réalité le « module » moyen de la matrice en écoulement plastique est plus faible que le module élastique, et la déformation plastique de la matrice au voisinage de l'inclusion — qui n'est plus homogène — doit permettre de relâcher partiellement les contraintes internes.

On peut voir précisément où intervient l'hypothèse du modèle « self-consistent » (déformation plastique homogène dans la matrice) en retrouvant la formule de KRÖNER à partir d'un raisonnement dû à HASHIN [10] dans le cas élastique.

a. Cas élastique.

Pour calculer la contrainte dans une inclusion sphérique de rayon a , de comportement quelconque, située dans une matrice infinie élastique et isotrope soumise à l'infini à un état de contrainte homogène Σ_{ij} , HASHIN décompose le champ de déplacement u_i ⁽¹⁾ dans la matrice en deux parties :

$$u_i^{(1)} = E_{ij}(t) x_j + u'_i$$

Le premier est donc le champ à l'infini puisque E_{ij} est la déformation élastique à l'infini; le second est le champ élastique solution du problème où l'inclusion est remplacée par une cavité sphérique de même dimension, à la surface de laquelle sont imposés les déplacements :

$$\begin{cases} u'_i|_{r=a} = c_{ij}(t) x_j \\ c_{ij}(t) = \varepsilon_{ij}^{(2)}(t) - E_{ij}(t) \end{cases}$$

où $\varepsilon_{ij}^{(2)}(t)$ est la déformation — homogène — dans l'inclusion.

Si les caractéristiques élastiques de la matrice sont λ_1, μ_1, ν_1 , HASHIN montre que la contrainte à l'interface s'écrit d'après la théorie de KELVIN [11] :

$$(I.4) \quad T_i|_{r=a} = -\frac{\mu_1}{a} \left(\frac{3-5\nu_1}{4-5\nu_1} c_{kk} \delta_{ij} + \frac{7-5\nu_1}{4-5\nu_1} c_{ij} \right) x_j$$

et, en exprimant la continuité des contraintes et des déplacements à l'interface, il obtient la contrainte — homogène — $\sigma_{ij}^{(2)}$ dans l'inclusion :

$$(I.5) \quad \sigma_{ij}^{(2)} = \Sigma_{ij} + \mu_1 \frac{3-5\nu_1}{4-5\nu_1} [E_{kk}(t) - \varepsilon_{kk}^{(2)}(t)] \delta_{ij} + \mu_1 \frac{7-5\nu_1}{4-5\nu_1} [E_{ij}(t) - \varepsilon_{ij}^{(2)}(t)]$$

b. Cas du modèle self-consistent.

Reprenons maintenant ce raisonnement dans le cas où la déformation ε_{ij} dans l'inclusion se décompose en une partie élastique ε'_{ij} et une partie plastique ε''_{ij} , où il existe dans la matrice une déformation plastique homogène E''_{ij} , mais où l'interaction est *purement élastique*, ce qui s'exprimera par un champ u'_i purement élastique. Supposons en plus que matrice et inclusion ont les mêmes caractéristiques élastiques (λ, μ, ν) et que les déformations plastiques se font sans variation de volume.

On écrira :

$$u'_i = (E_{ij}^e + E_{ij}^l) x_j + u'_i$$

$$c_{ij} = \varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij} = E_{ij}^e - E_{ij}'' - E_{ij}^l$$

$$T_i|_{r=a} = -\frac{\mu}{a} x_j \left[\frac{3-5\nu}{4-5\nu} (\varepsilon'_{kk} - E_{kk}^e) \delta_{ij} + \frac{7-5\nu}{4-5\nu} (\varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij} - E_{ij}^e - E_{ij}^l) \right]$$

d'où :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \mu \frac{3-5\nu}{4-5\nu} (E_{kk}^e - \varepsilon_{kk}^e) \delta_{ij} + \mu \frac{7-5\nu}{4-5\nu} [(E_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^e) + (E_{ij}'' - \varepsilon_{ij}^l)]$$

Par suite :

$$\varepsilon'_{ik} = E_{ik}^e$$

et :

$$E_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^e = -\frac{7-5\nu}{2 + \frac{4-5\nu}{4-5\nu}} (E_{ij}'' - \varepsilon_{ij}^l) = -\frac{7-5\nu}{15(1-\nu)} (E_{ij}'' - \varepsilon_{ij}^l)$$

D'où :

$$(I.6) \quad \sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu(1-\beta)(E_{ij}'' - \varepsilon_{ij}^l)$$

avec :

$$\beta = \frac{2}{15} \cdot \frac{4-5\nu}{1-\nu}$$

ce qui est exactement la formule de KRÖNER.

On voit donc que c'est à condition de prendre le champ u'_i purement élastique — c'est-à-dire en supposant que l'interaction entre matrice et inclusion est élastique — que l'on parvient à la formule de KRÖNER. En réalité, pour tenir compte du fait que la matrice est en écoulement plastique, qu'elle peut, de ce fait, ajuster sa forme à celle de l'inclusion également par les déformations plastiques, il faut prendre, dans le calcul précédent, un champ u'_i élastoviscoplastique et non simplement élastique. Ceci a évidemment pour effet de relâcher partiellement les contraintes internes et de les ramener à un niveau inférieur à celui indiqué par la formule de KRÖNER.

En réalité le schéma implicite du modèle « self-consistent » est celui d'un agrégat de cristaux dont les grains en écoulement plastique sont entourés par une zone suffisamment grande de grains inactifs (ayant pu subir auparavant une déformation plastique, mais non en écoulement à l'instant considéré) pour que l'écoulement du grain actif considéré ait une influence négligeable sur l'écoulement des grains actifs éloignés. Ce schéma est valable au début de la déformation plastique, en particulier quand un certain nombre de grains sont encore inactifs, ou encore lorsque, à la suite d'une décharge partielle en cours de fluage, un certain nombre de grains précédemment actifs, sont bloqués et constituent de la sorte autour des grains actifs, une zone purement élastique. Mais il reste tout à fait insuffisant dans le cas général.

On peut en particulier signaler, pour illustrer l'insuffisance du modèle de KRÖNER, le calcul fait par HASHIN [10] d'une inclusion sphérique viscoélastique dans une matrice infinie viscoélastique constituée d'un matériau différent dont on impose les déplacements à l'infini (ou la contrainte) correspondant à une déformation homogène. On peut voir sur ce cas précis que la formule de KRÖNER n'est valable qu'au tout début de la déformation, et que l'on obtient par la suite des contraintes internes beaucoup plus faibles que celles prévues par la relation de KRÖNER.

Il sera plus utile de faire, en s'inspirant du travail de HASHIN, un calcul plus proche du cas qui nous occupe (*en faisant intervenir l'anisotropie de la déformation viscoélastique dans l'inclusion et non pas la différence physique de matériau entre matrice et inclusion*) et de comparer l'évaluation exacte des contraintes internes avec celle qu'aurait fournie la formule de KRÖNER (ou celle de TAYLOR).

4. CALCUL DES CONTRAINTES INTERNES LORS DU FLUAGE EN TRACTION SIMPLE D'UN AGRÉGAT ISOTROPE DE CRISTAUX SPHÉRIQUES C.F.C. A UN SEUL SYSTÈME DE GLISSEMENT, DE COMPORTEMENT VISCOÉLASTIQUE LINÉAIRE ANISOTROPE ET SANS VARIATION DE VOLUME.

L'agrégat sera représenté par un cristal particulier inclus dans la matrice infinie constituée par tous les autres cristaux. On impose à l'infini un système de forces qui crée un champ de contraintes Σ_{ij} de traction simple, c'est-à-dire tel que :

$$\Sigma_{ij} = \frac{2\Sigma}{3} A_{ij} + \frac{\Sigma}{3} \delta_{ij} \quad (\Sigma \text{ constant})$$

où :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et où δ_{ij} est le symbole de KRONECKER.

Soit E_{ij}^{∞} la valeur de la déformation totale à l'infini, avec :

$$E_{ij}^{\infty} = E_{ij}^e + E_{ij}^p$$

où E_{ij}^e représente, suivant notre modèle, la valeur moyenne de la déformation purement visqueuse (propriété qui provient, comme on peut le montrer, de l'hypothèse de l'isotropie élastique).

On a de même dans chaque grain :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p$$

On continue à désigner par ε_{ij}^p et E_{ij}^p les déformations visqueuses pour montrer la parenté de ce problème avec le problème plastique où l'on négligerait les seuils d'écoulement.

On sait que la contrainte locale σ_{ij} est homogène dans une inclusion sphérique; de la sorte ε_{ij} , ε_{ij}^e et ε_{ij}^p le seront aussi.

Nous supposons le matériau incompressible. Cela a surtout l'avantage de simplifier considérablement les calculs, sans changer fondamentalement le sens du problème.

Chaque grain est supposé ne pouvoir glisser que suivant son système de glissement principal. De la sorte un grain est caractérisé par une matrice α_{ij} où, si $\vec{m}(m_i)$ est la normale unitaire au plan de glissement et $\vec{n}(n_i)$ le vecteur unitaire représentant la direction de glissement, α_{ij} est donné par :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} (m_i n_j + m_j n_i)$$

Si γ représente l'amplitude du glissement visqueux unitaire, et τ l'amplitude de la contrainte selon la direction de glissement, on trouve aisément :

$$\begin{cases} \tau = \alpha_{ij} \sigma_{ij} \\ \varepsilon_{ij}^p = \alpha_{ij} \cdot \gamma \end{cases}$$

La loi de comportement du grain, pour la partie visqueuse, est supposée linéaire, τ et γ étant liés par la relation :

$$\gamma = \int_0^t J(t - \theta) d\tau(\theta)$$

où $J(t)$ est la fonction de fluage pour le glissement principal, ce qui entraîne pour la déformation visqueuse :

$$\varepsilon_{ij}^p = \int_0^t \alpha_{ij} \alpha_{kl} J(t - \theta) d\sigma_{kl}(\theta)$$

Considérons le problème élastique parallèle d'une matrice élastique et isotrope de caractéristiques $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ soumise à un état de contrainte Σ_{ij} à l'infini, subissant une déformation élastique E_{ij}^∞ à l'infini, et contenant une inclusion sphérique de comportement quelconque, où la contrainte homogène est σ_{ij} et la déformation totale ε_{ij} . Le calcul de HASHIN [10] permet d'écrire comme on l'a vu plus haut (cf. [1.5]), et dans le cas de l'incompressibilité :

$$(I.7) \quad \sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 3 \mu_1 [E_{ij}^\infty(t) - \varepsilon_{ij}(t)]$$

Pour obtenir la solution de notre problème il suffit d'adopter la même relation que (I.7) en remplaçant les grandeurs précédentes par leurs images par la transformation de LAPLACE-CARSON [12]. Il nous faut évaluer pour cela la transformée de la fonction de relaxation *de la matrice*.

Nous ne nous donnons pas, à priori, cette fonction de relaxation : nous la calculerons à partir des moyennes opérées sur les différentes inclusions, et en considérant la matrice comme physiquement *homogène*. Il suffira donc d'exprimer que la déformation purement visqueuse de la matrice à l'infini (ou sa transformée) est la moyenne des déformations purement visqueuses des différents grains (ou de leurs transformées).

On aura donc :

$$E_{ij}^p = \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle$$

ou encore :

$$(I.8) \quad E_{ij}^{p \infty *} = \langle \alpha_{ij} \alpha_{kl} s_{kl}^* \rangle J^*$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$E_{ij}^{p \infty *} = \frac{1}{2} S_{ij}^* F^*$$

où s_{ij} et S_{ij} sont les déviateurs de σ_{ij} et Σ_{ij} et $F(t)$ la fonction de fluage de la matrice (pour la déformation purement visqueuse).

La transformée μ_1^* de la fonction de relaxation de la matrice (pour la déformation totale) est donnée par :

$$\mu_1^* = \frac{\mu}{1 + \mu F^*}$$

si μ est la valeur du module élastique de cisaillement d'un grain. (I.7) se transforme donc en :

$$\sigma_{ij}^* = \Sigma_{ij}^* + \frac{3 \mu}{1 + \mu F^*} [E_{ij}^{e \infty *} + E_{ij}^{p \infty *} - \varepsilon_{ij}^{e*} - \varepsilon_{ij}^{p*}]$$

soit, puisque :

$$(I.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}^* &= 2\mu \varepsilon_{ij}^* \quad \text{et} \quad \Sigma_{ij}^* = 2\mu E_{ij}^* : \\ t_{ij}^* &= \sigma_{ij}^* - \Sigma_{ij}^* = s_{ij}^* - S_{ij}^* = \frac{6\mu}{5+2\mu F^*} (E_{ij}^* - \varepsilon_{ij}^*) \end{aligned}$$

En se servant de (I.8), de :

$$\varepsilon_{ij}^* = \alpha_{ij} \alpha_{kl} J^* s_{kl}^*$$

et de la relation :

$$\alpha_{ij} \alpha_{ij} = \frac{1}{2},$$

on obtient :

$$\alpha_{ij} s_{ij}^* = 5 \frac{1+\mu F^*}{5+2\mu F^*+3\mu J^*} \alpha_{ij} S_{ij}^*$$

Pour la traction simple, on aura :

$$\varepsilon_{ij}^* = 5 \alpha_{ij} \alpha_{33} \Sigma J^* \frac{1+\mu F^*}{5+2\mu F^*+3\mu J^*}$$

Exprimons que $E_{ij}^* = \langle \varepsilon_{ij}^* \rangle$, en désignant par l^2 la moyenne de α_{33}^2 et en utilisant la relation facile à montrer (cf. chapitre suivant) :

$$\langle \alpha_{33} \alpha_{ij} \rangle = l^2 A_{ij}.$$

On obtient :

$$F^* = \frac{15 l^2 (1+\mu F^*) J^*}{5+2\mu F^*+3\mu J^*} = 3 l^2 J^* X^*$$

où :

$$X^* = \frac{\alpha_{kl} s_{kl}^*}{\alpha_{33} \Sigma} = 5 \frac{1+\mu F^*}{5+2\mu F^*+3\mu J^*}$$

On aboutit donc aux deux relations suivantes :

$$(I.10) \quad \left\{ \begin{aligned} t_{ij}^* &= \frac{6\mu X^* J^* \Sigma (l^2 A_{ij} - \alpha_{33} \alpha_{ij})}{5+6\mu l^2 J^* X^*} \end{aligned} \right.$$

$$(I.11) \quad \left\{ \begin{aligned} 6\mu l^2 J^* X^{*2} + [5-3\mu (5l^2-1) J^*] X^* - 5 &= 0 \end{aligned} \right.$$

qui permettent de résoudre le problème posé.

Supposons maintenant, afin de mener aisément le calcul à bout, que la fonction $J(t)$ est linéaire et homogène. On aura simplement :

$$J^* = \frac{1}{\eta p}$$

où η représente un coefficient de viscosité et p la variable complexe utilisée dans la transformation de CARSON. Les deux équations (I.10) et (I.11) se

transforment alors simplement, lorsque l'on revient aux fonctions de départ, en deux équations intégrales que l'on peut résoudre numériquement.

$$(I.12) \quad \begin{aligned} t_{ij}(t) = & \frac{6\mu}{5\eta} (l^2 A_{ij} - \alpha_{33} \alpha_{ij}) \int_0^t X(u) du \\ & - \frac{6\mu}{5\eta} l^2 \int_0^t X(t-u) t_{ij}(u) du \end{aligned}$$

et :

$$(I.13) \quad X(t) = 1 + \frac{3\mu}{5\eta} \int_0^t [5l^2 - 1 - 2l^2 X(t-u)] X(u) du$$

On a par ailleurs :

$$\begin{cases} E_{ij}^{p\infty} = \frac{\Sigma}{\eta} l^2 A_{ij} \int_0^t X(u) du = E_{ij}^{r\infty} A_{ij} \\ \varepsilon_{ij}^p = \frac{\Sigma}{\eta} \alpha_{33} \alpha_{ij} \int_0^t X(u) du. \end{cases}$$

La formule de KRÖNER aurait donné dans le cas viscoplastique :

$$t_{ij}^K = \frac{6\mu}{5} (E_{ij}^{r\infty} - \varepsilon_{ij}^p)$$

et celle de TAYLOR :

$$t_{ij}^T = 2\mu (E_{ij}^{p\infty} - \varepsilon_{ij}^p).$$

Dans le cas présent, il est facile de voir que l'on a :

$$\begin{cases} t_{ij}(t) = \Sigma (l^2 A_{ij} - \alpha_{33} \alpha_{ij}) h(t) \\ E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p = \Sigma (l^2 A_{ij} - \alpha_{33} \alpha_{ij}) g(t) \end{cases}$$

où $h(t)$ est la solution de :

$$(I.14) \quad h(t) = \frac{6\mu}{5\eta} \int_0^t X(u) du - \frac{6\mu}{5\eta} l^2 \int_0^t h(u) \cdot X(t-u) du$$

et $g(t)$ est donné par :

$$(I.15) \quad g(t) = \frac{1}{\eta} \int_0^t X(u) du$$

$X(t)$ étant toujours donné par (I,13); de sorte que l'on peut écrire :

$$t_{ij}(t) = \frac{6\mu}{5} f^K(t) (E_{ij}^{p\infty} - \varepsilon_{ij}^p)$$

ou :

$$(I.16) \quad \sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu (1 - \beta_I) (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \cdot f^K(t)$$

avec $\beta_I = \frac{2}{5}$, valeur de β dans le cas de l'incompressibilité ($\nu = \frac{1}{2}$) et avec :

$$f^K(t) = \frac{t_{ij}}{t_{ij}^K} = \frac{h(t)}{\frac{6\mu}{5} g(t)}$$

On pourrait aussi bien écrire :

$$t_{ij}(t) = f^T(t) \cdot t_{ij}^T$$

avec :

$$f^T(t) = \frac{h(t)}{2\mu g(t)}.$$

Le calcul numérique, fait sur ordinateur, conduit pour $f^K(t)$ et $f^T(t)$ aux deux courbes données sur la figure 1 (pour $\frac{\mu}{\eta}$ fixé).

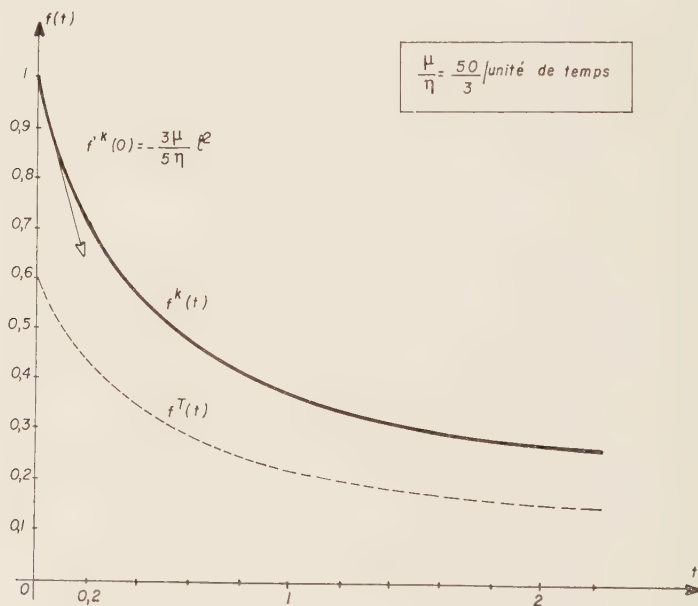


FIG. 1. — Valeurs de $\frac{t_{ij}}{t_{ij}^K}$ et de $\frac{t_{ij}}{t_{ij}^T}$

Le calcul se fait en résolvant (I,13) et (I,14) par discrétisation. Il se ramène pour un intervalle total de temps t fixé à la résolution d'un système linéaire dont la matrice est triangulaire dans les deux cas (l'intégration se fait par la méthode des trapèzes).

D'après la figure 1 il est clair que ce n'est qu'au tout début de la déformation que le modèle de KRÖNER donne une solution satisfaisante ($f^K(0) = 1$).

fais il surévalue considérablement les contraintes propres à mesure que la déformation augmente. Quant au modèle de TAYLOR, comme on l'a déjà vu, ne donne même pas une bonne approximation pour les petites déformations. On voit donc clairement sur cet exemple que l'hypothèse caractéristique du modèle « self-consistent », à savoir que la déformation plastique n'est pas affectée, dans sa distribution, par la présence de l'inclusion, conduit à une évaluation trop forte des contraintes propres. Il s'agit d'un modèle *qui ne tient pas compte de la relaxation des contraintes propres au cours de l'écoulement viscoplastique*.

LOI D'INTERACTION DE KRÖNER MODIFIÉE.

Pour pouvoir déterminer le comportement viscoplastique du polycristal, il est nécessaire de connaître d'une part la loi de comportement du monocristal, d'autre part un ensemble de données et de conditions décrivant complètement l'agrégat. Cet ensemble peut être envisagé de deux façons :

a. Ou bien on se donne la répartition dans l'espace des différents grains, en précisant pour chacun ses coordonnées, son orientation, sa forme, ses caractéristiques mécaniques et on exprime pour chaque grain, les conditions de continuité de grain à grain en contrainte, déplacement et vitesse de déplacement. Mais alors on ne peut raisonner que sur un ensemble particulier de grains, en nombre fini et nécessairement restreint, et on sacrifie la généralité du problème en n'en traitant que des cas particuliers, de valeur limitée.

b. Ou bien on ne décrit pas la répartition dans l'espace des différents grains et on raisonne sur un ensemble infini de grains en se donnant la distribution statistique de leur orientation. Il faut alors ramener le problème global à celui de l'interaction entre une inclusion particulière de paramètres donnés, et l'ensemble de tous les autres grains, constituant une matrice, physiquement homogène. Pour procéder rigoureusement, il faut exprimer le comportement de la matrice à partir d'une opération de moyenne sur tous les grains, considérés comme autant d'inclusions : on a alors à résoudre un problème *intégral* puisque les quantités étudiées dans les inclusions ne peuvent être calculées que si l'on connaît le comportement de la matrice, et que ce dernier s'obtient lui-même à partir de la moyenne des quantités étudiées dans les différents grains. La solution de ce problème intégral permet alors de dégager une loi d'interaction *a posteriori*, c'est-à-dire une loi d'évaluation, pour le problème considéré, des contraintes internes.

C'est ce deuxième procédé qui est couramment utilisé à ceci près que l'on ne donne d'ordinaire une loi d'interaction *a priori*, à partir d'une hypothèse simplificatrice de base qui évite de résoudre le problème intégral. Cette hypothèse varie avec les auteurs, et aboutit aux différents modèles énumérés plus haut :

- modèle de SACHS : $\tau = \tau_0$ quelle que soit l'orientation;
- modèle de TAYLOR : $\varepsilon_{ij} = E_{ij}$;
- modèle « statique » : $\sigma_{ij} = \Sigma_{ij}$;
- modèle de KRÖNER : E_{ij}^n homogène dans la matrice.

Pour notre part nous utiliserons également une loi d'interaction *a priori* mais en nous appuyant sur la résolution du problème intégral dans un cas simplifié du cas plus général que nous voulons traiter. Ce cas simple est celui traité au paragraphe précédent, qui ne diffère du cas plus général qui nous intéresse que par la nullité des seuils d'écoulement plastique dans les grains. Nous avons vu [formule (I.16)] que la loi d'interaction à laquelle on pouvait aboutir pour ce problème était la suivante :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu (1 - \beta_I) f^K(t) (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)$$

où β_I avait la valeur $\frac{2}{5}$ selon l'hypothèse d'incompressibilité, et où $f^K(t)$ est la fonction donnée sur la figure 1. On peut aussi bien, pour avoir une relation intrinsèque exprimer $f^K(t)$ en fonction de E^p soit $f(E^p)$, avec la fonction adéquate.

Ceci nous conduit à adopter, pour le cas plus général, une loi d'interaction *a priori*, modifiée de celle de KRÖNER, et analogue à la loi précédente, soit

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu (1 - \beta) \cdot f \cdot (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \text{ avec } E_{ij}^p < \varepsilon_{ij}^p >$$

où f est une fonction *empirique*, à ajuster avec les résultats expérimentaux mais devant vérifier certaines propriétés découlant de celles de $f^K(t)$, et traduisant qualitativement l'insuffisance du modèle de KRÖNER et les corrections à y apporter :

● f doit dépendre, dans le cas viscoplastique, non seulement de E^p , mais aussi de la contrainte macroscopique Σ , du seuil d'écoulement dans les grains τ_0 , et également de la proportion de grains actifs que nous caractériserons par un paramètre Y^* , fonction croissante de cette proportion et que nous définirons plus complètement dans le chapitre suivant ($Y^* = 2$ si tous les grains sont bloqués). D'où :

$$(I.17) \quad \sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu (1 - \beta) \cdot f(\Sigma, E^p, \tau_0, Y^*) \cdot (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)$$

● f doit décroître avec E^p et avec Y^* , et être égale à 1 (cas de KRÖNER) au début de l'écoulement plastique ou lorsque l'écoulement est bloqué dans tous les grains :

$$(I.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial E^p} < 0 \\ \frac{\partial f}{\partial Y^*} \leq 0 \\ f(\Sigma, 0, \tau_0, Y^*) = f(\Sigma, E^p, \tau_0, 2) = 1 \end{array} \right.$$

Nous verrons que le modèle développé à partir de la relation (I.17) donne des résultats bien plus proches des résultats expérimentaux que le modèle fondé sur la loi de KRÖNER, même en conservant à la fonction f sa forme indéterminée, sous réserve des seules conditions (I.18) et de quelques autres qui apparaîtront naturellement dans les calculs ultérieurs. De plus l'ajustement de la fonction f à partir de l'expérience permettra non seulement d'obtenir u

en accord quantitatif avec les résultats expérimentaux ayant permis l'ajustement, mais encore de retrouver de nouvelles propriétés expérimentales, distinctes des précédentes. Ceci compensera en partie le caractère semi-empirique de la loi d'interaction *a priori* contenu dans l'introduction de la fonction f .

REMARQUES.

On peut, par avance, préciser un peu plus la forme de la fonction f en reprenant le calcul du paragraphe 3, qui permet de retrouver la formule de KRÖNER à partir de la méthode de HASHIN et de l'hypothèse de base du modèle « self-consistent », et en introduisant de façon simplifiée le caractère non purement élastique de l'interaction entre matrice et inclusion.

Exprimons en effet le champ de déplacement dans la matrice comme la somme du champ homogène $(E_{ij}^e + E_{ij}^p) x_j$ et du champ non purement élastique $u_i' c_{ij}$ doit maintenant s'écrire sous la forme :

$$c_{ij} = c_{ij}^e + c_{ij}^p$$

où c_{ij}^e et c_{ij}^p (partie élastique et partie plastique) sont tous deux des déviateurs symétriques. En reprenant le calcul de HASHIN, il est facile de montrer que l'on obtient alors :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} - \mu \frac{7-5\nu}{4-5\nu} c_{ij}^e$$

Faisons alors l'hypothèse de comportement suivante : c_{ij}^e et c_{ij}^p sont reliés de la même façon que le sont $\mathcal{E}_{ij}^e$ (déviateur de la déformation élastique moyenne) et $\mathcal{E}_{ij}^p$. Par exemple, si l'on écrit :

$$S_{ij} = 2\mu \mathcal{E}_{ij}^e = 2\mathcal{L} (\mathcal{E}_{ij}^e + E_{ij}^p)$$

où, pour simplifier, $\mathcal{L}$ désigne un opérateur intégrodifférentiel linéaire indépendant de l'espace, on aura :

$$2\mu c_{ij}^e = 2\mathcal{L} (c_{ij}^e + c_{ij}^p)$$

On arrive alors à la relation :

$$(19) \quad \left(2\mu + \frac{7-5\nu}{4-5\nu} \mathcal{L} \right) (\sigma_{ij} - \Sigma_{ij}) = 2\mu \frac{7-5\nu}{4-5\nu} \mathcal{L} (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)$$

au début de la déformation plastique, $\mathcal{L}$ se comporte comme la constante μ . On obtient alors :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu (1 - \beta) (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)$$

c'est-à-dire la loi de KRÖNER.

Par contre, par la suite, σ_{ij} aura une valeur inférieure à celle donnée par cette formule.

Si, en simplifiant encore, on adopte pour $\mathcal{L}$, une constante $\overline{\mathcal{L}}$, représentant en moyenne le $\mathcal{L}$ réel, on trouvera :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \frac{2\mu(7-5\nu)\overline{\mathcal{L}}}{2\mu(4-5\nu) + (7-5\nu)\overline{\mathcal{L}}} (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)$$

Par exemple, en prenant pour $\overline{\mathcal{L}}$ le module sécant en traction simple (égal à μ s'il n'y a pas encore d'écoulement plastique), on a :

$$\overline{\mathcal{L}} = \frac{\mu \Sigma}{\Sigma + 3\mu E^p}$$

où $E_{ij}^p = E^p A_{ij}$, d'où la formule globale approchée :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu(1-\beta) \frac{\Sigma}{\Sigma + 3\mu\beta E^p} (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)$$

Ceci revient à prendre pour $f(\Sigma, E^p)$ la fonction : $\frac{\Sigma}{\Sigma + 3\mu\beta E^p}$.

Remarquons que cette fonction satisfait aux conditions (I.18) et vérifie en plus :

$$f(\Sigma, E^p) + E^p \frac{\partial f(\Sigma, E^p)}{\partial E^p} = \frac{\Sigma^2}{(\Sigma + 3\mu\beta E^p)^2} > 0$$

Nous retrouverons cette propriété dans le cas général.

C'est ce type de formule que nous adopterons dans le cas du fluage en traction simple, en faisant intervenir en plus la proportion de grains actifs, et le seuil d'écoulement τ_0 .

On peut remarquer par ailleurs que le calcul fait au paragraphe 4 conduit à une relation du type de celle donnée par (I.19) lorsque $\nu = \frac{1}{2}$ et lorsque $\mathcal{L}$ est un opérateur de convolution.

Le modèle développé par la suite sera tout d'abord fondé sur la relation de KRÖNER, puis on modifiera celle-ci dans le sens indiqué ci-dessus pour en tirer les principales conséquences.

CHAPITRE II

COMPORTEMENT EN TRACTION SIMPLE
D'UN MODÈLE STATISTIQUE POLYCRISTALLIN
(VISCOPLASTICITÉ)

Suivant les remarques faites au chapitre précédent (§ 5) nous avons besoin pour définir le modèle, de trois éléments :

- une loi de distribution statistique des orientations des différents grains (supposés de même seuil d'écoulement initial et de même forme géométrique);
- une loi d'interaction entre les grains, c'est-à-dire une loi d'évaluation des contraintes internes;
- une loi de comportement du monocristal.

MODÈLE DE « SACHS-KRÖNER-BINGHAM ».

Le modèle envisagé (modèle « S.K.B. ») est défini par les hypothèses suivantes :

a. Il s'agit d'un assemblage isotrope de cristaux C.F.C. (i. e. : d'orientation *équiprobable*) : la loi de distribution des orientations est donc la même que celle adoptée dans le modèle de SACHS.

b. Les cristaux interagissent suivant la *loi de KRÖNER*. Avec les notations du chapitre précédent, on a donc :

$$I.1) \quad \sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu (1 - \beta) (E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)$$

On suppose *l'élasticité isotrope*.

c. On n'envisage, pour chaque cristal C.F.C., que les 24 systèmes de glissement : $\{111\} \langle 110 \rangle$.

On suppose de plus que seul peut jouer le système de glissement *principal* pour chaque cristal, système défini, suivant la loi de SCHMID, par celui correspondant à la cisssion effective maximum; quand le glissement a commencé sur un système de glissement, c'est ce système seulement (ou son opposé dans le cas d'un renversement de contrainte) qui jouera dorénavant.

Si τ représente la cission effective sur ce système de glissement, et γ le glissement suivant ce système ($\gamma \geq 0$), la loi d'écoulement est donnée par

$$(II.2) \quad \tau = \tau_0 + C\gamma + \eta\dot{\gamma} \quad (\text{pour } \tau > \tau_0 + C\gamma)$$

Le modèle cristallin est un modèle de BINGHAM avec patin de KEPES (on fera souvent, dans la suite du calcul, $C = 0$, le module d'écrouissage du monocristal C étant très faible devient μ). τ_0 , C et η sont pris identiques pour tous les cristaux : ils ne dépendent pas de l'orientation (fig. 2).

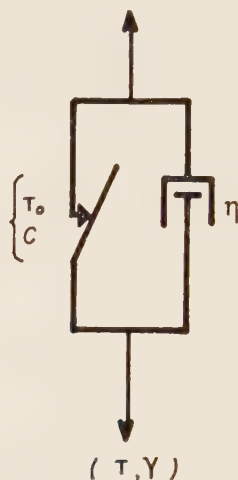


FIG. 2. — Cristal de BINGHAM

A. REMARQUES PRÉLIMINAIRES

1. Calcul de la cission τ et de la déformation ε_{ij}^p .

Soit, dans le repère $(\vec{1}, \vec{2}, \vec{3})$ dont l'axe 3 porte l'axe de traction, $\vec{m}(m_i)$ et $\vec{n}(n_i)$ les vecteurs unitaires perpendiculaire au plan de glissement et parallèle à la direction de glissement. Si l'on introduit la matrice symétrique α_{ij} définie par :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} (m_i n_j - m_j n_i)$$

on a aussitôt :

$$(II.3) \quad \tau = \alpha_{ij} \sigma_{ij}$$

et :

$$(II.4) \quad \varepsilon_{ij}^p = \gamma \alpha_{ij}$$

On convient que, dans le repère naturel $(\vec{I}, \vec{II}, \vec{III})$ de chaque cristal, $m_1 > 0$. Pour repérer chaque cristal, on fait les conventions suivantes : considérons les trois directions orthogonales parallèles aux côtés du cube élémentaire d'un cristal donné. Nous les orientons de telle sorte qu'elles fassent toutes trois un angle aigu (ou droit) avec l'axe de traction. Nous prenons pour axe $\vec{III}$ celui qui fait l'angle le plus grand avec l'axe 3. Nous choisissons les axes $\vec{I}$ et $\vec{II}$ de telle sorte que le trièdre $(\vec{I}, \vec{II}, \vec{III})$ soit direct.

Pour chaque cristal, il y a 4 vecteurs $\vec{m}$ possibles et, pour chaque $\vec{m}$, 6 vecteurs $\vec{n}$ possibles, soit en tout 24 systèmes de glissement. En appliquant la loi de KRÖNER, on a :

$$\tau = \alpha_{ij} \sigma_{ij} = \alpha_{ij} \Sigma_{ij} + 2\mu (1 - \beta) (\alpha_{ij} E_{ij}^p - \alpha_{ij} \alpha_{ij} \gamma) = \tau_0 + C\gamma + \eta \dot{\gamma}$$

le système de glissement est actif.

De plus :

$$\Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma \end{pmatrix}; \quad \alpha_{ij} \alpha_{ij} = \frac{1}{2}; \quad \alpha_{ii} = 0$$

donc :

$$\tau = \alpha_{33} \Sigma + 2\mu (1 - \beta) \alpha_{ij} E_{ij}^p - \mu (1 - \beta) \gamma$$

est la moyenne sur tous les grains de ε_{ij}^p :

$$(1.5) \quad E_{ij}^p = \langle \gamma \alpha_{ij} \rangle$$

Calcul de α_{ij} pour les systèmes principaux.

D'après nos hypothèses, on détermine les systèmes de glissement principaux (définis par α_{33} maximum) sans tenir compte des contraintes résiduelles.

Chaque cristal est représenté par son trièdre caractéristique $(\vec{I}, \vec{II}, \vec{III})$ dont les paramètres (ψ, θ, φ) sont déterminés comme indiqué sur la figure 3.

Le domaine de variation de (ψ, θ, φ) , dans les axes $(\varphi, \cos \theta, \psi)$ est un cylindre de génératrices parallèles à l'axe ψ , limité par les plans $\psi = 0$ et $\psi = 2\pi$ et dont la section plane dans le plan $\psi = 0$ est représentée sur la figure 4. Dans le domaine A c'est le système : $\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]$ qui est le plus favorisé (α_{33} maximum) et, dans le domaine B, c'est le système :

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right]$$

On obtient alors sans difficulté, par leur formule de définition, l'expression des α_{ij} dans le domaine A et dans le domaine B (Annexe 1).

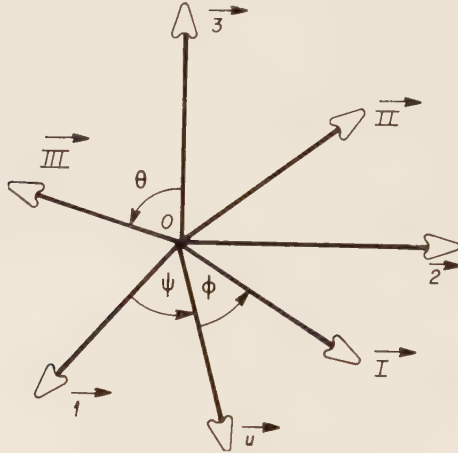


FIG. 3. — Système de référence

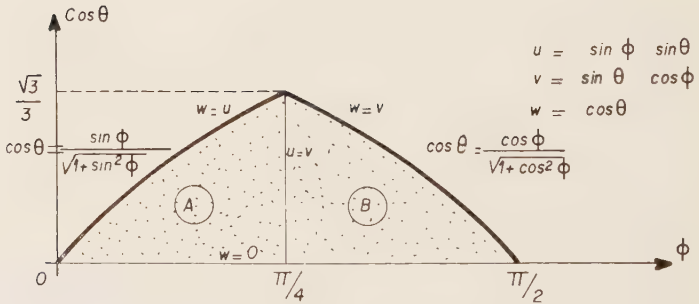


FIG. 4. — Domaine de variation de (θ, Φ)

3. Expression de E_{ij} .

Le calcul explicite des α_{ij} (pour $i \neq 3, j \neq 3$) permet de vérifier la propriété suivante : dans l'hypothèse de la loi de SCHMID, et en traction simple, le tenseur E_{ij}^p a la forme :

$$(II.6) \quad E_{ij}^p = E^p \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans notre calcul, cela découle des propriétés suivantes :

— α_{33} est indépendant de ψ ;
 — l'écoulement plastique dans un grain ne dépend que de τ et non de σ_{ij} , et donc γ ne dépend pas de ψ (à condition que τ_0 , C et η ne dépendent pas plus de ψ);

— la valeur moyenne sur les ψ de la matrice α_{ij} (à θ et φ constants) est égale à :

$$\langle \alpha_{ij}(\psi) \rangle_{\theta, \varphi} = \alpha_{33}(\theta, \varphi) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit aussitôt pour les grains actifs ($\dot{\gamma} > 0$) :

$$(II.7) \quad \tau = \alpha_{33} [\Sigma + 3\mu(1 - \beta)E^p] - \mu(1 - \beta)\gamma = \tau_0 + C\gamma + \eta\dot{\gamma}$$

4. Calcul de $\langle \alpha_{33} \rangle$: (moyenne faite sur tous les grains).

Il suffit par exemple de faire la moyenne dans A. Si l'on pose $y = \cos \theta$, on trouve aisément :

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{33} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} \times \frac{12}{\pi} \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi}}} [\cos \theta (\sin \varphi + \cos \varphi) \\ &\quad + \sin \varphi \cdot y \sqrt{1 - y^2} - (\sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi + 1)y^2] dy \end{aligned}$$

soit :

$$\langle \alpha_{33} \rangle = \frac{2\sqrt{6}}{3\pi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \neq 0,45235_1.$$

Il sera aussi utile pour la suite, de calculer $l^2 = \langle \alpha_{33}^2 \rangle$. En procédant de la même façon, on trouve :

$$l^2 = \langle \alpha_{33}^2 \rangle = \frac{1}{15} + \frac{1}{3\pi} \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{5} \right) \neq 0,20632_7.$$

La même méthode permet de démontrer le résultat utilisé au chapitre précédent :

$$\langle \alpha_{33} \alpha_{ij} \rangle = l^2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque qu'on peut ainsi calculer exactement la valeur moyenne de α_{33} , alors que SACHS [2] n'avait pu évaluer que graphiquement la valeur moyenne de son inverse : $m = \frac{1}{\alpha_{33}}$.

5. Équation de fluage.

a. Imposons, à l'instant initial, une contrainte macroscopique Σ_1 de traction, telle que tous les grains puissent glisser d'emblée, ce qui signifie :

$$\Sigma_1 \geq \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$$

On verra en effet plus loin que la valeur minimale de α_{33} est $\frac{2}{3\sqrt{6}}$.

On a alors dans chaque grain :

$$\alpha_{33} \Sigma_1 + 3\mu (1 - \beta) \alpha_{33} E^p - \mu (1 - \beta) \gamma = \tau_0 + C\gamma + \eta \dot{\gamma}$$

Multiplions les deux membres de cette équation par α_{33} et faisons la moyenne sur tous les grains en remarquant que :

$$\begin{aligned} E^p &= \langle \alpha_{33} \gamma \rangle \\ \text{et : } \dot{E}^p &= \langle \alpha_{33} \dot{\gamma} \rangle \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$(II.8) \quad \eta \dot{E}^p + [C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle)] E^p = \langle \alpha_{33}^2 \rangle \Sigma_1 - \langle \alpha_{33} \rangle \tau_0$$

b. Supposons au contraire que Σ_1 soit inférieur à $\frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$ mais supérieur à $2\tau_0$; cela signifie qu'une partie des grains seulement se mettent en mouvement instantanément. Pour chacun de ces grains, on a :

$$\alpha_{33} \Sigma_1 - \tau_0 = \eta \dot{\gamma} + [C + \mu (1 - \beta)] \gamma - 3\mu (1 - \beta) \alpha_{33} E^p$$

Pour les grains bloqués aux premiers instants ($\alpha_{33} < \frac{\tau_0}{\Sigma_1}$) on a :

$$\tau = \alpha_{33} \Sigma_1 + 3\mu (1 - \beta) \alpha_{33} E^p$$

Comme E^p augmente à cause du glissement, des grains actifs, certains des grains initialement bloqués se débloquent progressivement sous l'effet des contraintes propres. C'est l'effet d'entraînement. Un tel grain se débloquent si E^p parvient à atteindre la valeur qui rend $\tau = \tau_0$:

$$E^p = \frac{\tau_0 - \alpha_{33} \Sigma_1}{3\mu (1 - \beta) \alpha_{33}}$$

De la sorte à chaque instant t , il existe une valeur frontière de α_{33} , que nous désignerons par $\alpha_{33}^* = \frac{1}{Y^*}$ telle que les grains dont le coefficient est supérieur à α_{33}^* sont actifs, tandis que les autres sont bloqués. On a :

$$Y^* = \frac{1}{\alpha_{33}^*} = \frac{\Sigma_1 + 3\mu(1-\beta)E^p}{\tau_0}$$

Donc, pour $\alpha_{33} \geq \alpha_{33}^*$, à chaque instant t , on a :

$$\eta \dot{\gamma} + [C + \mu(1-\beta)]\dot{\gamma} = \tau_0 \left\{ \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{33}^*} - 1 \right\}$$

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation par α_{33} et si l'on fait la moyenne sur les grains actifs, *mais rapportée à tous les grains*, on a :

$$(II.9) \quad \eta \dot{E}^p + [C + \mu(1-\beta)] E^p = \tau_0 \frac{[\alpha_{33}^2] - \alpha_{33}^* [\alpha_{33}]}{\alpha_{33}^*}$$

en notant, si $P(\alpha_{33})$ désigne la densité de probabilité *normée* de α_{33} :

$$(II.10) \quad [\alpha_{33}] = \int_{\alpha_{33}^*}^{1/2} \alpha_{33} P(\alpha_{33}) d\alpha_{33} \quad \text{et} \quad [\alpha_{33}^2] = \int_{\alpha_{33}^*}^{1/2} \alpha_{33}^2 P(\alpha_{33}) d\alpha_{33}$$

et en remarquant que $\dot{\gamma} = \dot{\gamma} = 0$ pour tous les grains bloqués.

B. CALCUL DE $[\alpha_{33}]$ ET $[\alpha_{33}^2]$

Si $P(\alpha_{33})$ représente la densité de probabilité normée de α_{33} , c'est-à-dire telle que :

$$\int_{2/3\sqrt{6}}^{1/2} P(\alpha_{33}) d\alpha_{33} = 1$$

on a, suivant les définitions données plus haut :

$$[\alpha_{33}] = \int_{\alpha_{33}^*}^{1/2} \alpha_{33} P(\alpha_{33}) d\alpha_{33} = \langle \alpha_{33} \rangle - \int_{2/3\sqrt{6}}^{\alpha_{33}^*} \alpha_{33} P(\alpha_{33}) d\alpha_{33}$$

$$[\alpha_{33}^2] = \int_{\alpha_{33}^*}^{1/2} \alpha_{33}^2 P(\alpha_{33}) d\alpha_{33} = \langle \alpha_{33}^2 \rangle - \int_{2/3\sqrt{6}}^{\alpha_{33}^*} \alpha_{33}^2 P(\alpha_{33}) d\alpha_{33}$$

Il est commode d'introduire les fonctions suivantes :

$$P_c(\alpha_{33}) = \int_{2/3\sqrt{6}}^{\alpha_{33}} P(x) dx; \quad \Pi'(\alpha_{33}) = \int_{2/3\sqrt{6}}^{\alpha_{33}} P_c(x) dx;$$

$$\Pi_c(\alpha_{33}) = \int_{2/3\sqrt{6}}^{\alpha_{33}} \Pi'(x) dx$$

On trouve alors en intégrant par parties :

$$[\alpha_{33}] = \langle \alpha_{33} \rangle - \alpha_{33}^* P_c(\alpha_{33}^*) + \Pi'(\alpha_{33}^*)$$

$$[\alpha_{33}^2] = \langle \alpha_{33}^2 \rangle - \alpha_{33}^{*2} P_c(\alpha_{33}^*) + 2\alpha_{33}^* \Pi'(\alpha_{33}^*) - 2\Pi_c(\alpha_{33}^*)$$

Il reste donc à calculer les fonctions P , P_c , Π' , Π'_c . Nous nous limiterons au calcul de $P(\alpha_{33})$ et de $P_c(\alpha_{33})$, en nous contentant d'évaluations graphiques pour Π' et Π'_c étant donné leurs valeurs très faibles par rapport à celles de P_c .

1. Calcul de $P(\alpha_{33})$ et de $P_c(\alpha_{33})$.

Il se fait en considérant comme fixe une maille du cristal C.F.C. et en repérant l'axe de traction, variable, par un point sur la demi-sphère unité. Par raison de symétrie il suffit d'envisager un seul des 24 triangles sphériques tracés sur cette demi-sphère correspondant aux différentes expressions de α_{33} . On calcule alors l'aire comprise entre les intersections de la sphère avec deux cylindres hyperboliques équilatères voisins correspondant aux valeurs (α_{33}) et $(\alpha_{33} + d\alpha_{33})$, et située à l'intérieur des côtés du triangle sphérique considéré cette aire étant proportionnelle à $P(\alpha_{33}) d\alpha_{33}$. Aux différents cas d'intersection de la courbe $(\alpha_{33} = \text{cte})$ et des côtés du triangle sphérique correspondent différentes expressions analytiques de $P(\alpha_{33})$, et, sur la courbe $P(\alpha_{33})$, la présence de points anguleux (fig. 5). L'expression de $P(\alpha_{33})$ fait intervenir des intégrales elliptiques indéfinies de 1^{re} espèce.

Le calcul de $P_c(\alpha_{33})$ se fait de façon analogue, en intégrant directement l'expression de l'aire sphérique intérieure au triangle sphérique considéré et comprise entre la valeur initiale de α_{33} et sa valeur courante. Le calcul fait intervenir des intégrales elliptiques indéfinies de 1^{re} et de 3^e espèces. On peut voir sur la figure 6 que les α_{33} sont très concentrés dans la zone des valeurs supérieures, proches de $\frac{1}{2}$. Ainsi alors que α_{33} varie entre $\frac{2}{3\sqrt{6}}$ et 0,5, la moitié des grains ont un coefficient α_{33} supérieur à 0,463 et 90 % des grains ont un coefficient α_{33} supérieur à 0,395.

Les principales étapes du calcul et les résultats explicites sont donnés dans l'annexe II.

2. Évaluation de $[\alpha_{33}]$ et $[\alpha_{33}^2]$.

On peut donc, à partir de la courbe $P_c(\alpha_{33})$ évaluer graphiquement les fonctions $\Pi'(\alpha_{33})$ et $\Pi'_c(\alpha_{33})$ et calculer $[\alpha_{33}]$ et $[\alpha_{33}^2]$ en fonction de α_{33}^* : les résultats sont donnés sur la figure 7. Ce calcul préliminaire permet de déduire l'équation macroscopique de fluage en traction simple pour toute une classe de modèles obéissant aux hypothèses suivantes :

— répartition équiprobable des orientations de cristaux;

— loi d'interaction du type de KRÖNER, c'est-à-dire en général de la forme : $\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + K (E''_i - \varepsilon'_i)$ avec K indépendant de l'orientation (mais pouvant dépendre par exemple de E'');

— loi de comportement du type (avec un seul système de glissement) :

$$\tau + B_1 \dot{\tau} + B_2 \ddot{\tau} + \dots + B_p \tau^{(p)} = \tau_0 + A_0 \dot{\gamma} + A_1 \ddot{\gamma} + A_2 \gamma^{(3)} + \dots + A_n \gamma^{(n)}$$

où les A_i et B_i sont indépendants de l'orientation.

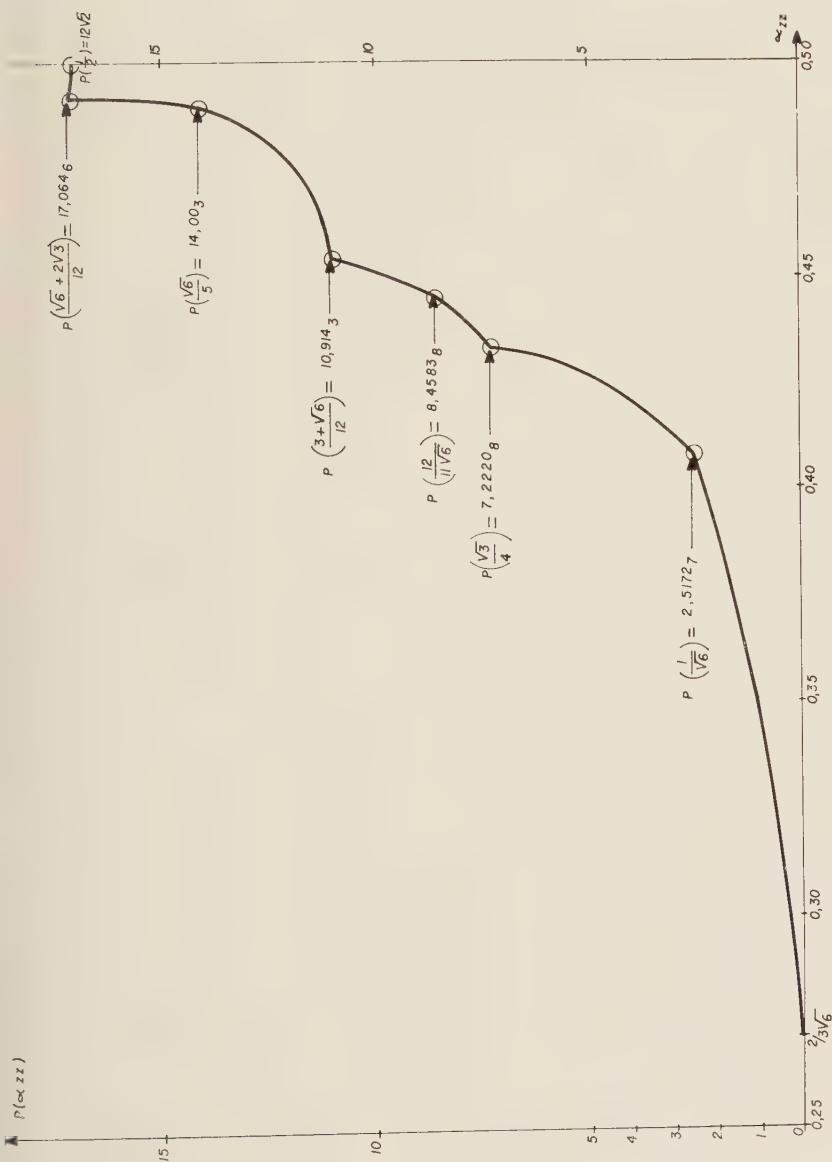
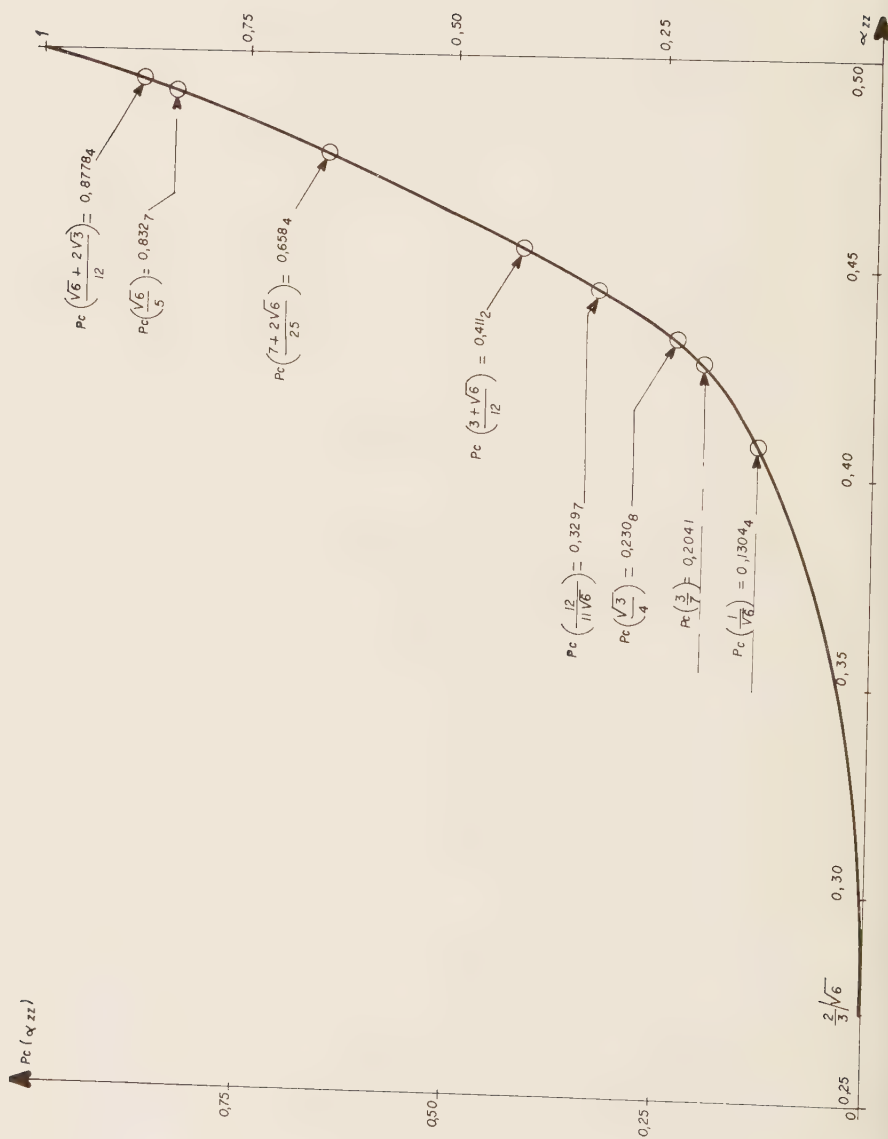


FIG. 5. — $P(\alpha_{zz})$



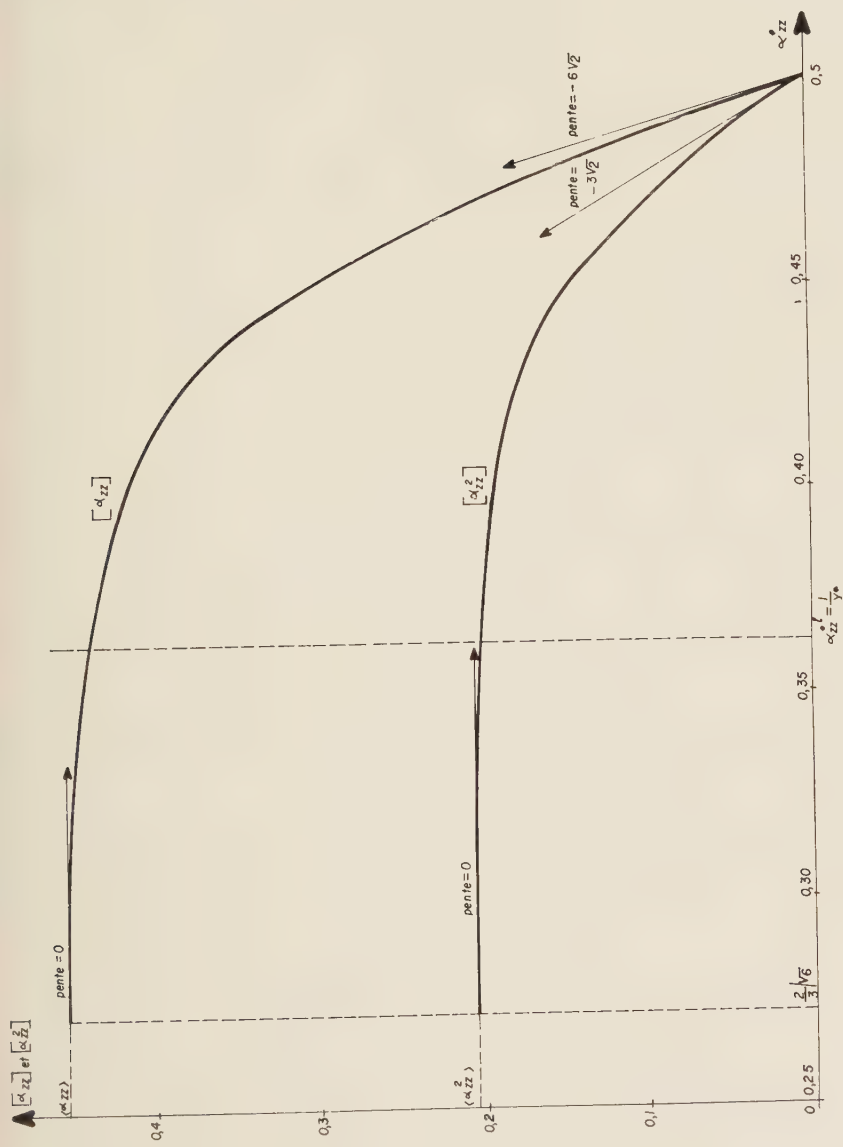


FIG. 7. — $[\alpha_{zz}]$ et $[\alpha_{zz}^2]$

C. COMPORTEMENT EN FLUAGE SOUS CONTRAINTE CONSTANTE

On impose à l'instant initial la contrainte Σ_1 . 2 cas peuvent se produire : soit $\Sigma_1 > \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$ soit $2\tau_0 \leq \Sigma_1 \leq \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$ (Le cas où $\Sigma_1 < 2\tau_0$ est trivial : il n'y a aucune déformation plastique, donc pas de fluage).

$$1. \quad \Sigma_1 \geq \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$$

L'équation macroscopique de fluage est donnée par la formule (II.8) dont la solution est :

$$(II.11) \quad E^p = \frac{<\alpha_{33}^2> \Sigma_1 - <\alpha_{33}> \tau_0}{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 <\alpha_{33}^2>)} \left[1 - e^{-\frac{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 <\alpha_{33}^2>)}{\eta} t} \right]$$

$$\dot{E}^p = \frac{<\alpha_{33}^2> \Sigma_1 - <\alpha_{33}> \tau_0}{\eta} e^{-\frac{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 <\alpha_{33}^2>)}{\eta} t}$$

Le fluage est donc limité quelque soit Σ_1 , la limite étant :

$$E^p_{\infty} = \frac{<\alpha_{33}^2> \Sigma_1 - <\alpha_{33}> \tau_0}{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 <\alpha_{33}^2>)}$$

donc linéaire en Σ_1 . On voit que la pente limite μ^p de l'écroutissage plastique est (en ne tenant pas compte de la déformation élastique) :

$$\mu^p = \frac{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 <\alpha_{33}^2>)}{<\alpha_{33}^2>}$$

Si l'on néglige C devant μ , et si l'on prend un coefficient de Poisson $\nu = 0,35$, on trouve $\mu^p \neq \mu$, valeur nettement supérieure aux résultats habituels. Nous examinerons les raisons de cet excès plus loin.

b. Le calcul de E^p permet alors de calculer le glissement dans chaque grain. On trouve, d'après (II.7) et (II.11) :

$$(II.12) \quad \gamma = \frac{\tau_0 (\alpha_{33} <\alpha_{33}> - <\alpha_{33}^2>)}{<\alpha_{33}^2> [C + \mu (1 - \beta)]} \left\{ 1 - e^{-\frac{C + \mu (1 - \beta)}{\eta} t} \right\}$$

$$+ \frac{\alpha_{33} (<\alpha_{33}^2> \Sigma_1 - <\alpha_{33}> \tau_0)}{<\alpha_{33}^2> (C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 <\alpha_{33}^2>))} \left\{ 1 - e^{-\frac{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 <\alpha_{33}^2>)}{\eta} t} \right\}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta <\alpha_{33}^2>} [\tau_0 (\alpha_{33} <\alpha_{33}> - <\alpha_{33}^2>) e^{-\frac{C + \mu (1 - \beta)}{\eta} t}$$

$$+ \alpha_{33} (<\alpha_{33}^2> \Sigma_1 - <\alpha_{33}> \tau_0) e^{-\frac{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 <\alpha_{33}^2>)}{\eta} t}]$$

On vérifie sans difficulté que l'on a bien $E^p = <\alpha_{33}> \gamma$. Il est facile de vérifier, avec la condition $\alpha_{33} \Sigma_1 > \tau_0$, que $\dot{\gamma}$ n'est jamais négatif, quel que

soit α_{33} . Enfin on peut calculer la cission τ dans tous les grains d'après (II.7) et (II.12) :

$$(II.13) \quad \tau = \alpha_{33} \Sigma_1 - \mu (1 - \beta) \left\{ \alpha_{33} \left(\frac{1}{\langle \alpha_{33}^2 \rangle} - 3 \right) \frac{\langle \alpha_{33}^3 \rangle \Sigma_1 - \langle \alpha_{33} \rangle \tau_0}{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 \langle \alpha_{33}^3 \rangle)} \right. \\ \left. \left[1 - e^{-\frac{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 \langle \alpha_{33}^3 \rangle)}{\eta} t} \right] + \frac{\tau_0 (\alpha_{33} \langle \alpha_{33} \rangle - \langle \alpha_{33}^2 \rangle)}{\langle \alpha_{33}^3 \rangle [C + \mu (1 - \beta)]} \left[1 - e^{-\frac{C + \mu (1 - \beta)}{\eta} t} \right] \right\}$$

On voit donc que γ , $\dot{\gamma}$ et τ sont des fonctions croissantes de α_{33} .

Par contre, $\frac{\gamma}{\alpha_{33}}$ et $\frac{\dot{\gamma}}{\alpha_{33}}$ sont fonctions croissantes de α_{33} , tandis que $\frac{\tau}{\alpha_{33}}$ décroît avec α_{33} .

$$2. \quad 2\tau_0 \leq \Sigma_1 \leq \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$$

On a déjà vu que E^p obéissait à l'équation (II.9) soit :

$$\eta \dot{E}^p + [C + \mu (1 - \beta)] E^p = \tau_0 \{ Y^* [\alpha_{33}^2] - [\alpha_{33}] \}$$

avec :

$$Y^* = \frac{1}{\alpha_{33}^*} = \frac{\Sigma_1 + 3\mu (1 - \beta) E^p}{\tau_0}$$

On peut alors écrire l'équation différentielle de Y^* .

En particulier, si l'on fait $C = 0$, on a :

$$(II.14) \quad \frac{\eta \dot{Y}^*}{\mu (1 - \beta)} = Y_0^* - Y^* + 3 [\alpha_{33}^2] Y^* - 3 [\alpha_{33}]$$

où :

$$Y_0^* = Y^* (0) = \frac{\Sigma_1}{\tau_0}$$

Pour que tous les grains puissent être entraînés à glisser, il faut que l'on ait :

$$Y_0^* > Y_l^*$$

où Y_l^* est la valeur de Y_0^* qui rend $\dot{Y}^*$ nul pour $Y^* = \frac{3\sqrt{6}}{2}$, soit :

$$Y_l^* = \frac{3\sqrt{6}}{2} + 3 \langle \alpha_{33} \rangle - \frac{9\sqrt{6}}{2} \langle \alpha_{33}^2 \rangle = \frac{6\sqrt{6}}{5} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{23\sqrt{6}}{10} - \frac{22\sqrt{3}}{5} + \sqrt{2} \right] \\ \neq 2,75700_1$$

Pour $2\tau_0 \leq \Sigma_1 < Y_l^* \tau_0$ il reste, même au bout d'un temps infini, une certaine proportion de grains qui n'auront jamais glissé (L'effet de l'écrasement propre C est d'augmenter légèrement la valeur de Y_l^* donc de rendre plus difficile l'effet d' « entraînement »).

a. Calcul du « temps d'entraînement ».

Dans le cas où $Y_l^* \tau_0 \leq \Sigma_1 \leq \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$, on peut calculer le temps nécessaire pour que tous les grains parviennent à se mettre en mouvement. L'équation aux Y^* donne un effet un « temps d'entraînement » T_0 égal à :

$$(II.15) \quad T_0 = \frac{\eta}{\mu (1-\beta)} \int_{Y_0^*}^{\frac{3\sqrt{6}}{2}} \frac{dY^*}{Y_0^* - Y^* + 3 [\alpha_{33}^2] Y^* - 3 [\alpha_{33}]} \text{ pour } Y_0^* \geq Y_l^*$$

Ceci peut s'évaluer graphiquement, mais on peut remarquer que pour $Y_0^* > Y_l^*$, on peut raisonnablement prendre $[\alpha_{33}^2] \neq \langle \alpha_{33}^2 \rangle$ et $[\alpha_{33}] \neq \langle \alpha_{33} \rangle$ d'après la figure 7. On trouve alors (fig. 8) :

$$T_0 = \frac{\eta}{\mu (1-\beta)} \cdot \frac{1}{1-3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle} \text{Log} \left[1 + (1-3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle) \frac{\frac{3\sqrt{6}}{2} - Y_0^*}{Y_0^* - Y_l^*} \right]$$

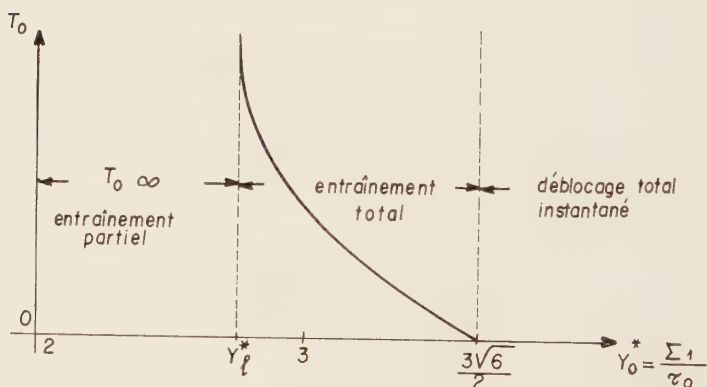


FIG. 8. — Variation du temps d'entraînement avec la contrainte imposée

b. Loi de fluage pour $t \geq T_0$.

A partir de $t = T_0$, l'équation de fluage redevient celle que nous avons pour $\Sigma_1 \geq \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$.

L'expression de E^p , pour $t \geq T_0$ s'écrit :

$$E^p = \frac{\langle \alpha_{33}^2 \rangle \Sigma_1 - \langle \alpha_{33}^2 \rangle \tau_0}{C + \mu (1-\beta) (1-3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle)} \left[1 - e^{-\frac{C + \mu (1-\beta) (1-3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle)}{\eta} (t - T_0)} \right] + \frac{\frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0 - \Sigma_1}{3 \mu (1-\beta)} e^{-\frac{C + \mu (1-\beta) (1-3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle)}{\eta} (t - T_0)}$$

E_{∞}^p reste toujours donnée par :

$$E_{\infty}^p = \frac{\langle \alpha_{33}^2 \rangle \Sigma_1 - \langle \alpha_{33}^2 \rangle \tau_0}{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle)}$$

c. Cas ou $2\tau_0 \leq \Sigma_1 < Y_l^* \tau_0$:

On peut calculer la proportion limite de grains passifs, caractérisée par Y_{∞}^* . On trouve, en faisant $\dot{Y}_{\infty}^* = 0$:

$$Y_0^* - (1 - 3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle_{\infty}) Y_{\infty}^* - 3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle_{\infty} = 0$$

La variation de Y_{∞}^* en fonction de Y_0^* est donnée par la figure 9. On a de plus :

$$E_{\infty}^p = \frac{\tau_0}{3\mu(1-\beta)} (Y_{\infty}^* - Y_0^*)$$

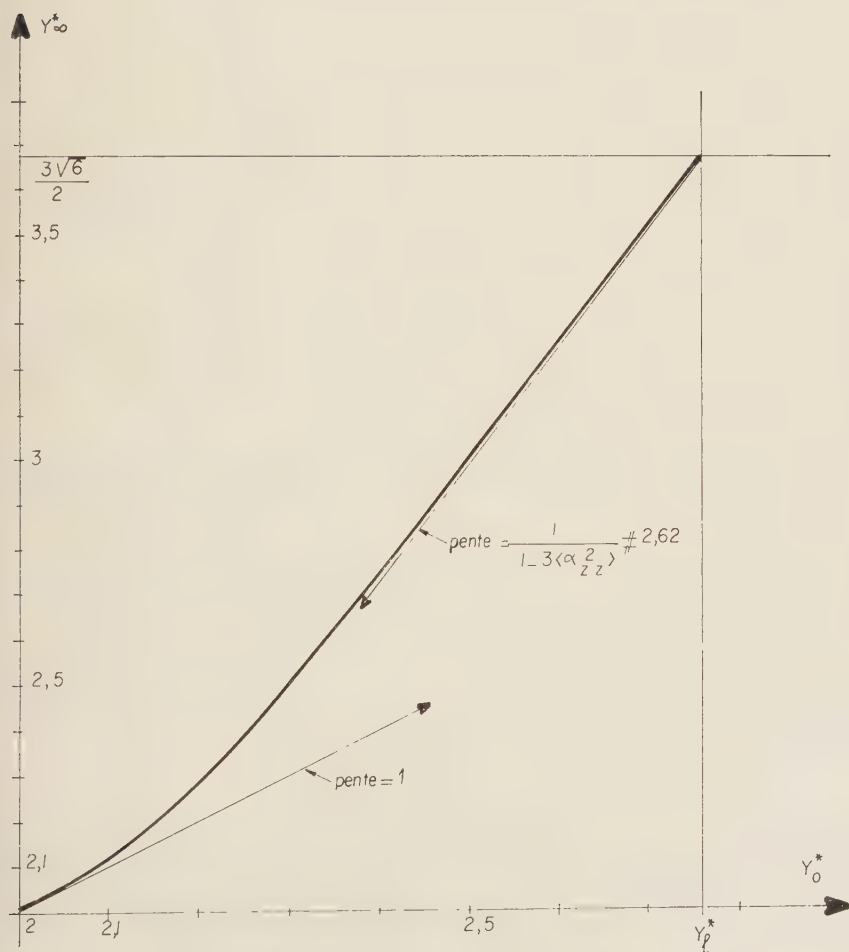


FIG. 9. — Variation de Y_{∞}^* en fonction de $Y_0^* = \frac{\Sigma_1}{\tau_0}$

ce qui s'obtient directement à partir de la courbe de la figure 9. On peut tracer ainsi la courbe statique de traction $\Sigma_1 = f(E_y'')$ et la raccorder à la droite que l'on obtient pour la portion $\Sigma_1 \geq Y_1^* \tau_0$. La figure 10 donne la

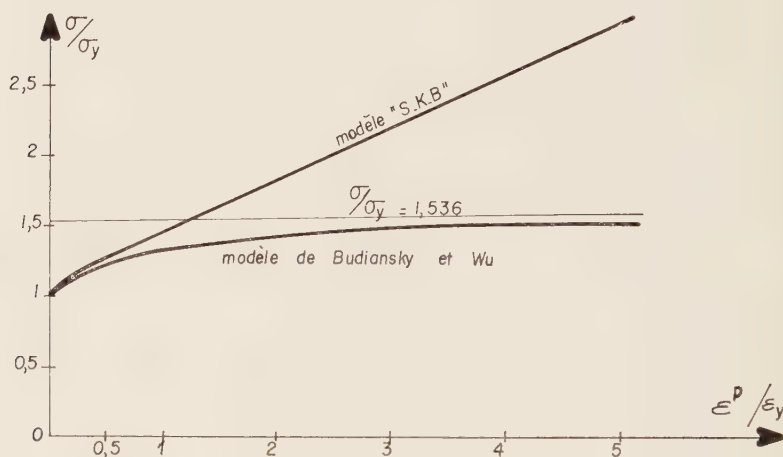


FIG. 10. — Écrouissage (comparaison avec le modèle de Budiansky et Wu)

courbe $\frac{1}{2} Y_0 = \frac{\Sigma_1}{2 \tau_0}$ en fonction de $\frac{E_y'}{E_{py}}$. On y prend $\nu = 1/3$ et on rapporte :

$$E_y'' \text{ à } E_{py} = \frac{2 \tau_0}{2\mu(1+\nu)}$$

afin de pouvoir faire une comparaison avec les résultats classiques de BUDIANSKY et WU [8] :

On a :

$$\frac{\Sigma_1}{2 \tau_0} = \frac{Y_0^*}{2}$$

et :

$$\frac{E_y''}{E_{py}} = \frac{(1+\nu)}{3(1-\beta)} \cdot (Y^* - Y_0^*)$$

On voit que, si le modèle de BUDIANSKY et WU fournit un écrouissage beaucoup plus faible que normal, le modèle « S.K.B. », au contraire, est trop « raide ». Cela est principalement dû au fait que l'on a fixé *un seul système de glissement possible*, ce qui a pour effet — sauf pour les très faibles déformations — d'augmenter la contrainte nécessaire pour provoquer une déformation donnée (le modèle de KRÖNER ne peut en effet être mis en cause puisque c'est celui adopté également par BUDIANSKY et WU).

D. RÉPONSE A UNE DÉCHARGE PARTIELLE EN COURS DE FLUAGE

Étudions maintenant la réponse du modèle « S.K.B. » à une décharge partielle en cours de fluage d'amplitude $\Delta\Sigma = \Sigma_1 - \Sigma_2$.

On supposera que Σ_2 est fixé d'avance et, pour plus de simplicité, que $\Sigma_2 \geq \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$. On fera alors varier Σ_1 et θ , l'instant de la décharge. A l'instant θ , chaque grain subit, sur son système de glissement principal, une diminution de cission instantanée $\Delta\tau = \alpha_{33}\Delta\Sigma$. Pour que le grain continue à glisser, il faut que l'on ait :

$$\tau(\theta_+) \geq \tau_0 + C \cdot \gamma(\theta) \quad \text{avec} \quad \tau(\theta_+) = \tau(\theta_-) - \alpha_{33}\Delta\Sigma$$

ce qui peut s'exprimer par :

$$(II.16) \quad \dot{\eta} \dot{\gamma}(\theta_-) - \alpha_{33} \Delta\Sigma \geq 0$$

$\dot{\gamma}(\theta_-)$ étant une fonction linéaire de α_{33} , on peut écrire :

$$\dot{\eta} \dot{\gamma}(\theta_-) = \alpha_{33} g(\theta_-) + h(\theta_-) \quad \text{avec} \quad g(\theta_-) \geq 0 \quad \text{et} \quad h(\theta_-) \leq 0$$

Donc à l'instant θ , seront bloqués les grains caractérisés par un α_{33} , tel que :

$$\alpha_{33} \leq \alpha_{33}^*(\theta) = \frac{-h(\theta)}{g(\theta) - \Delta\Sigma}$$

tandis que les grains vérifiant la condition :

$$\alpha_{33} > \alpha_{33}^*(\theta)$$

continueront à glisser à une vitesse inférieure.

Pour $t > \theta$, on remarque que :

- + E^p et $\dot{E}^p$ resteront positifs si l'on se limite au cas où il n'y a renversement du glissement dans aucun des grains à l'instant θ . Par suite les grains actifs à l'instant $\theta +$ le resteront;
- + la cission dans les grains bloqués à l'instant θ est telle que, tant qu'ils sont bloqués, on a :

$$\begin{cases} \tau = \alpha_{33} \Sigma_2 + \mu(1 - \beta) [3 \alpha_{33} E^p - \gamma(\theta_-)] \\ \dot{\tau} = 3 \alpha_{33} \mu(1 - \beta) \dot{E}^p \geq 0 \end{cases}$$

Cela signifie que, du fait du glissement des grains non bloqués, la cission augmente dans les grains bloqués et que, au moins pour certains d'entre eux, elle peut atteindre la valeur qui leur permettra de se débloquer au bout d'un certain temps. Cela sera possible si E^p atteint une valeur telle que :

$$\alpha_{33} \Sigma_2 + \mu(1 - \beta) [3 \alpha_{33} E^p - \gamma(\theta_-)] = \tau_0 + C \gamma(\theta_-)$$

C'est cette propriété que nous appellerons « hésitation au fluage ». Il est clair que cette propriété n'existe pas pour notre monocristal isolé; ce dernier ne répond que de deux façons possibles à une décharge partielle en cours de fluage :

- poursuite du glissement à une vitesse inférieure;
- blocage indéfini.

Au contraire, pour le polycristal, il y a, suivant les valeurs de Σ_1 et θ , toute une gamme de possibilités intermédiaires.

1. Zone de non-blocage à l'instant θ .

Cela signifie que, même pour les grains les plus mal orientés ($\alpha_{33} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$) on a :

$$\eta \dot{\gamma}(\theta_-) - \alpha_{33} \Delta \Sigma > 0$$

D'où en posant : $Y_0 = \frac{\Sigma_2}{\tau_0}$ et $\Delta Y_0 = \frac{\Delta \Sigma}{\tau_0}$, la condition nécessaire :

$$(II.17) \quad \Delta Y_0 < \frac{Y_0 - \frac{\langle \alpha_{33} \rangle}{\langle \alpha_{33}^2 \rangle} - \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - \frac{\langle \alpha_{33} \rangle}{\langle \alpha_{33}^2 \rangle} \right) e^{-\frac{3\mu(1-\beta)\langle \alpha_{33}^2 \rangle}{\eta} \theta}}{e^{\frac{C+\mu(1-\beta)(1-3\langle \alpha_{33}^2 \rangle)}{\eta} \theta} - 1}$$

On peut ainsi délimiter, dans le plan $(\theta, \Delta Y_0)$ une zone de « non-hésitation » (fig. 13).

Dans ces conditions, on trouve simplement pour $t > \theta$ (comme en viscoélasticité linéaire si τ_0 était nul) :

$$E \nu(t) = \frac{\langle \alpha_{33}^2 \rangle \Sigma_1 - \langle \alpha_{33} \rangle \tau_0}{C + \mu(1-\beta)(1-3\langle \alpha_{33}^2 \rangle)} \left[1 - e^{-\frac{C+\mu(1-\beta)(1-3\langle \alpha_{33}^2 \rangle)}{\eta} t} \right] - \frac{\langle \alpha_{33} \rangle (\Sigma_1 - \Sigma_2)}{C + \mu(1-\beta)(1-3\langle \alpha_{33}^2 \rangle)} \left[1 - e^{-\frac{C+\mu(1-\beta)(1-3\langle \alpha_{33}^2 \rangle)}{\eta} (t-\theta)} \right]$$

2. Zones de blocage partiel à l'instant θ .

Si la relation (II.17) n'est pas vérifiée, mais si certains grains au moins restent actifs, on a :

$$\eta \dot{\gamma}(\theta_-) - \alpha_{33} \Delta \Sigma > 0$$

au moins pour les grains les mieux orientés ($\alpha_{33} = \frac{1}{2}$). Cela s'écrit :

$$(II.18) \quad \Delta Y_0 < \frac{Y_0 - \frac{\langle \alpha_{33} \rangle}{\langle \alpha_{33}^2 \rangle} + \left(\frac{\langle \alpha_{33} \rangle}{\langle \alpha_{33}^2 \rangle} - 2 \right) e^{-\frac{3\mu(1-\beta)\langle \alpha_{33}^2 \rangle}{\eta} \theta}}{e^{\frac{C+\mu(1-\beta)(1-3\langle \alpha_{33}^2 \rangle)}{\eta} \theta} - 1}$$

A l'intérieur du domaine de la figure 13 compris entre les courbes correspondant aux relations (II.17) et (II.18) [domaines 2 et 3], étudions les conditions de reprise du glissement des grains initialement bloqués à l'instant θ . Les grains actifs à l'instant $t > \theta$ auront un coefficient α_{33} supérieur à α_{33}^* défini par :

$$\alpha_{33}^* = \frac{1}{Y^*} = \frac{\tau_0 + [C + \mu (1 - \beta)] \gamma^* (\theta)}{\Sigma_2 + 3 \mu (1 - \beta) E^p}$$

où $\gamma^*(\theta)$ est le glissement à l'instant θ des grains de coefficient α_{33}^* . Avec l'expression donnée plus haut de $Y^*(\theta)$, il est facile de voir que l'on obtient :

$$Y^* - Y^*(\theta) = \frac{3 \mu (1 - \beta) [E^p - E^p(\theta)]}{\tau_0 e^{-\frac{C + \mu (1 - \beta)}{\eta} \theta}}$$

où :

$$\dot{Y}^* = \frac{3 \mu (1 - \beta)}{\tau_0} \cdot e^{-\frac{C + \mu (1 - \beta)}{\eta} \theta} \cdot \dot{E}^p$$

De plus, pour $\alpha_{33} > \alpha_{33}^*$, on a :

$$\eta \dot{\gamma} + [C + \mu (1 - \beta)] \dot{\gamma} = \alpha_{33} \Sigma_2 - \tau_0 + 3 \mu (1 - \beta) \alpha_{33} E^p$$

En utilisant les notations du chapitre A, on a maintenant :

$$E^p = \langle \alpha_{33} \gamma \rangle = E^p(\theta) + [\alpha_{33} \gamma] - [\alpha_{33} \gamma(\theta)]$$

$$\dot{E}^p = \langle \alpha_{33} \dot{\gamma} \rangle = [\alpha_{33} \dot{\gamma}]$$

où :

$$\begin{aligned} \eta \dot{E}^p + [C + \mu (1 - \beta)] \dot{E}^p &= E^p - E^p(\theta) + [\alpha_{33} \gamma(\theta)] \{ \\ &= [\alpha_{33}^2] \Sigma_2 - [\alpha_{33}] \tau_0 + 3 \mu (1 - \beta) [\alpha_{33}^2] E^p \end{aligned}$$

On en déduit l'équation en Y^* :

$$\begin{aligned} \text{II.19)} \quad \eta \dot{Y}^* + [C + \mu (1 - \beta)] \dot{Y}^* &= Y^* - Y^*(\theta) \{ \\ &= 3 \mu (1 - \beta) (Y^* [\alpha_{33}^2] - [\alpha_{33}]) \end{aligned}$$

C'est l'équation que nous avons déjà étudiée dans le cas d'une simple mise en charge à l'instant 0 pour $2 < \frac{\Sigma_1}{\tau_0} \leq \frac{3\sqrt{6}}{2}$, à condition d'opérer un décalage,

sur le temps, de θ (cf. § C-2). On connaît donc les principaux résultats (en supposant, pour simplifier $C = 0$) :

a. Si $Y_i^* \leq Y^*(\theta) \leq \frac{3\sqrt{6}}{2}$, tous les grains finiront par se remettre en mouvement, ceci à l'instant $t = \theta + T_H$ (T_H étant le « temps d'hésitation »), où T_H est donné par :

$$(II.20) \quad T_H = \frac{\eta}{\mu(1-\beta)} \int_{Y^*(\theta)}^{\frac{3\sqrt{6}}{2}} [Y^*(\theta) - Y^* + 3[\alpha_{33}^2] Y^* - 3[\alpha_{33}]]^{-1} dY^*$$

ou en première approximation :

$$T_H \approx \frac{\eta}{\mu(1-\beta)} \cdot \frac{1}{1-3<\alpha_{33}^2>} \cdot \text{Log} \left[1 + (1-3<\alpha_{33}^2>) \frac{\frac{3\sqrt{6}}{2} - Y^*(\theta)}{Y^*(\theta) - Y_i^*} \right]$$

On peut donc exprimer, à partir de la relation de définition de $Y^*(\theta)$, T_H en fonction de ΔY_0 et de θ (fig. 11 et 12). A partir de l'instant $\theta + T_H$ tous les grains sont actifs et l'équation de fluage s'écrit :

$$\eta \dot{E}^p + [C + \mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{33}^2>)] E^p = <\alpha_{33}^2> \Sigma_2 - \tau_0 <\alpha_{33}^2>$$

avec :

$$E^p(\theta + T_H) = E^p(\theta) + \tau_0 e^{\frac{-(C + \mu(1-\beta))}{\eta} \theta} \left[\frac{3\sqrt{6}}{2} - Y^*(\theta) \right]$$

La déformation continue donc jusqu'à sa valeur limite :

$$E^p = \frac{<\alpha_{33}^2> \Sigma_2 - <\alpha_{33}^2> \tau_0}{C + \mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{33}^2>)}$$

On peut remarquer que, dans la période d'« hésitation » la concavité de la courbe de fluage reste toujours tournée vers les $E^p < 0$.

On trouve en effet pour $t > \theta$

$$(II.21) \quad \eta \ddot{E}^p = \frac{\tau_0}{3} e^{-\frac{\mu(1-\beta)}{\eta} \theta} Y^*(1-3[\alpha_{33}^2]) < 0$$

b. Si $2 \leq Y^*(\theta) \leq Y_i^*$:

Dans ce cas bien que la contrainte appliquée Σ_2 soit supérieure à $\frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$, il restera indéfiniment, pour $t > 0$, des grains qui ne se remettront pas à glisser.

On a déjà représenté (fig. 9) la courbe donnant Y_i^* en fonction de Y_0^* dans le cas d'une mise en charge simple. Dans le cas d'une décharge partielle en cours de fluage, cette courbe représente Y_∞^* en fonction de $Y^*(\theta)$.

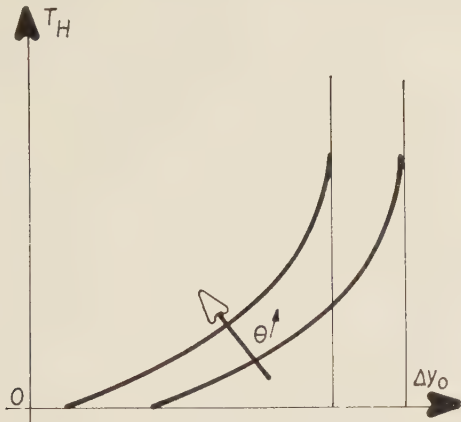


FIG. 11. — $T_H(\Delta Y_0)$ à θ constant

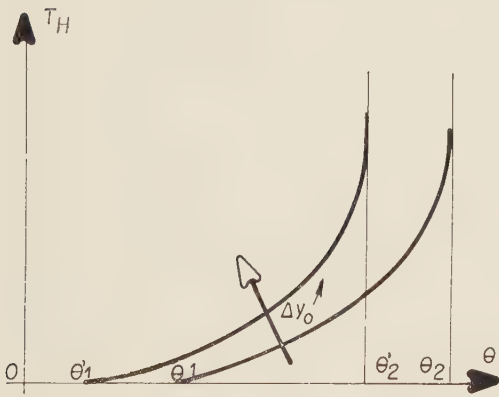


FIG. 12. — $T_H(\theta)$ à ΔY_0 constant

On aura cette fois :

$$p = \frac{\Sigma_2 <\alpha_{33}^2> - \tau_0 <\alpha_{33}>}{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 <\alpha_{33}^2>)} - \frac{\tau_0 <\alpha_{33}^2> e}{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 <\alpha_{33}^2>)} \cdot \frac{(C + \mu (1 - \beta))}{\eta} \theta \left[Y^*(\theta) - \frac{<\alpha_{33}>}{<\alpha_{33}^2>} \right]$$

c. *Exprimons*, dans le plan $(\Delta Y_0, \theta)$ la condition $Y^*(\theta) = Y'_*$, d'après l'expression donnée de $Y^*(\theta)$ dans le paragraphe précédent, on obtient :

I.22)
$$\Delta Y_0 = \frac{Y_0 - \frac{<\alpha_{33}>}{<\alpha_{33}^2>} - \left(Y'_* - \frac{<\alpha_{33}>}{<\alpha_{33}^2>} \right) e^{-\frac{3 \mu (1 - \beta) <\alpha_{33}^2>}{\eta} \theta}}{\frac{C + \mu (1 - \beta) (1 - 3 <\alpha_{33}^2>)}{e} \frac{\theta}{\eta} - 1}$$

La courbe correspondante sépare, sur la figure 13, les domaines 2 et 3

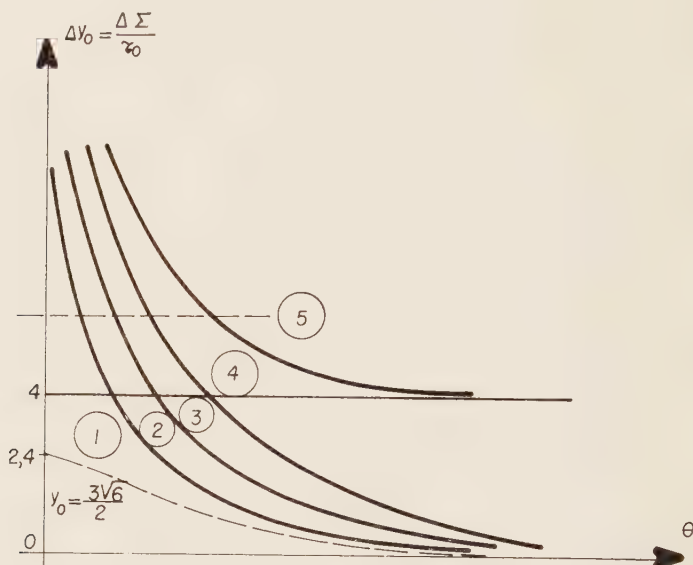


FIG. 13. — Réponse à une décharge partielle en cours de fluage (Y_0 fixé) :

1. Non-hésitation (pas de blocage initial);
2. Blocage initial partiel, puis reprise totale (hésitation);
3. Blocage initial partiel, puis reprise partielle;
4. Blocage initial total (pas de reprise);
5. Renversement du glissement.

3. Zone de blocage total à l'instant θ .

Cette zone est limitée inférieurement par la courbe limite de blocage partiel à l'instant θ (II.18) et supérieurement par la courbe représentant la condition que, au moins, dans certains grains (en fait, ceux correspondant à α_{33} maximum, soit 1/2) le glissement se renverse dès l'instant θ . En supposant $C = 0$ cette condition s'exprime par :

$$(II.23) \quad \Delta Y_0 = \frac{Y_0 - \frac{\langle \alpha_{33} \rangle}{\langle \alpha_{33}^2 \rangle} + \left(\frac{\langle \alpha_{33} \rangle}{\langle \alpha_{33}^2 \rangle} - 2 \right) e^{-\frac{3\mu(1-\beta)\langle \alpha_{33}^2 \rangle}{\eta}\theta}}{e^{\frac{\mu(1-\beta)(1-3\langle \alpha_{33}^2 \rangle)}{\eta}\theta} - 1} + \frac{4}{1 - e^{-\frac{\mu(1-\beta)(1-3\langle \alpha_{33}^2 \rangle)}{\eta}\theta}}$$

Dans la zone au-delà, on pourrait étudier également différents cas :

— les grains entraînés instantanément au glissement renversé ne parviennent pas à entraîner dans ce glissement renversé tous les grains bloqués, mais $\dot{E}^p(\theta +) < 0$;

— ils parviennent au contraire à entraîner tous les grains;

— tous les grains glissent instantanément en sens inverse.

Nous ne ferons pas cette étude qui n'offre pas de grandes différences avec la précédente.

k. *Récapitulation.*

Les différentes réponses à une décharge partielle en cours de fluage sont donc rassemblées sur la figure 13 pour Σ_2 (ou Y_0) fixé.

On voit que, pour θ fixé, on traverse, quand ΔY_0 croît, successivement les zones définies plus haut. Pour ΔY_0 fixé, quand θ croît il en va de même, sauf pour $\Delta Y_0 < 4$ où la zone (5) ne peut être atteinte. Quand Y_0 augmente, toutes les courbes de la figure 13 se déplacent en s'éloignant de l'origine, les asymptotes restent fixes.

E. CAS D'UNE MISE EN VIBRATIONS

On impose à l'instant initial une contrainte de traction de la forme :

$$\Sigma = \Sigma_0 + \tilde{\Sigma}_1 \sin \omega t$$

en supposant que :

$$\Sigma_0 - \tilde{\Sigma}_1 > \frac{3\sqrt{6}}{2} \cdot \tau_0$$

Supposons d'abord que tous les grains restent actifs; l'équation de fluage s'écrit :

$$\eta \dot{E}^p + \mu (1 - \beta) (1 - 3 < \alpha_{33}^2 >) E^p = < \alpha_{33}^2 > (\Sigma_0 + \tilde{\Sigma}_1 \sin \omega t) - < \alpha_{33} > \tau_0$$

La solution est donc :

$$\begin{aligned} \text{I.24) } E^p = & \frac{< \alpha_{33}^2 > \Sigma_0 - < \alpha_{33} > \tau_0}{\mu (1 - \beta) (1 - 3 < \alpha_{33}^2 >)} \left[1 - e^{-\frac{\mu (1 - \beta) (1 - 3 < \alpha_{33}^2 >)}{\eta} t} \right] \\ & - \frac{\eta \omega < \alpha_{33}^2 > \tilde{\Sigma}_1}{K^2 + \eta^2 \omega^2} \cos \omega t + \frac{\eta \omega < \alpha_{33}^2 > \tilde{\Sigma}_1}{K^2 + \eta^2 \omega^2} e^{-\frac{\mu (1 - \beta) (1 - 3 < \alpha_{33}^2 >)}{\eta} t} \\ & + \frac{\mu (1 - \beta) (1 - 3 < \alpha_{33}^2 >) < \alpha_{33} > \tilde{\Sigma}_1}{K^2 + \eta^2 \omega^2} \sin \omega t \end{aligned}$$

où :

$$K = \mu (1 - \beta) (1 - 3 < \alpha_{33}^2 >)$$

On voit donc que, tant que tous les grains sont actifs, la déformation de fluage est, en moyenne, *supérieure* à celle observée sous Σ_0 constant. Il existe un déphasage φ entre la déformation plastique et la contrainte appliquée, où

$$t g \varphi = \frac{\eta \omega}{\mu (1 - \beta) (1 - 3 < \alpha_{33}^2 >)}$$

est indépendant de la contrainte et proportionnel à la fréquence. Cependant l'hypothèse $\dot{\gamma} > 0$, $\forall \alpha_{33}$ n'est plus vérifiée au bout d'un certain temps.

On trouve en effet, suivant cette hypothèse :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = & \frac{\alpha_{33} < \alpha_{33} > - < \alpha_{33}^2 >}{\eta < \alpha_{33}^2 >} \tau_0 e^{-\frac{\mu(1-\beta)}{\eta} t} \\ & - \frac{\alpha_{33}}{< \alpha_{33}^2 >} \left\{ \frac{K \omega < \alpha_{33}^2 > \tilde{\Sigma}_1}{K^2 + \eta^2 \omega^2} - \frac{< \alpha_{33}^2 > \Sigma_0 - < \alpha_{33} > \tau_0}{\eta} \right\} \times \\ & e^{-\frac{K}{\eta} t} + \frac{\eta \omega^2 \alpha_{33} \tilde{\Sigma}_1}{K^2 + \eta^2 \omega^2} \sin \omega t + \frac{K \omega \alpha_{33} \tilde{\Sigma}_1}{K^2 + \eta^2 \omega^2} \cos \omega t \end{aligned}$$

Cela signifie que $\dot{\gamma}$ commence à s'annuler, au bout d'un temps fini, pour les grains de plus faible α_{33} . Par conséquent, au bout d'un certain nombre de cycles, le calcul précédent n'est plus valable. En fait le calcul exact est inextricable puisque, à chaque cycle, deux effets se superposent (qui jouent tous deux dans le sens du déblocage des grains bloqués) :

- d'une part la contrainte τ varie, du fait que Σ varie;
- d'autre part il y a l'effet d'entraînement des grains bloqués par les grains actifs.

Cependant si l'on suppose $\tilde{\Sigma}_1$ très petit par rapport à Σ_0 et en particulier si l'on a :

$$\tilde{\Sigma}_1 < \frac{4\sqrt{3}}{9} \left(\Sigma_0 - \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0 \right)$$

$\dot{\gamma}$ ne s'annule pour les α_{33} petits qu'au bout d'un temps relativement long : pendant tout ce temps (II,24) est valable, et, approximativement, plus longtemps encore car ce sont les grains apportant la plus faible contribution à la déformation totale qui se bloquent en premier.

Le résultat principal est donc que, sous vibrations, la déformation plastique macroscopique est supérieure à celle que l'on observerait à Σ_0 constant.

Sans entrer dans le détail du calcul, qui serait trop long, on comprend donc que l'arrêt des vibrations entraîne des phénomènes analogues à celui de l'« hérissement » dans le cas d'une décharge partielle.

F. RÉSUMÉ DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

On peut retenir les principales propriétés suivantes du modèle « S.K.B. », propriétés liées à la désorientation des grains telle qu'elle est prise en compte par la loi de KRÖNER, et que nous confronterons plus loin à l'expérience (toujours en traction simple) :

— existence de deux seuils différents de fluage, l'un correspondant à une plastification partielle des grains suivant leur orientation ($2 < Y_0^* < Y_l^*$), l'autre à une plastification totale (« instantanée » pour : $Y_0^* \geq \frac{3\sqrt{6}}{2}$, différée pour : $Y_l^* < Y_0^* < \frac{3\sqrt{6}}{2}$). Dans les deux cas, le fluage est limité;

— existence de deux régimes différents d'écrouissage statique correspondant, sur la courbe (Σ, E^p) l'un à une portion de courbe convexe, l'autre à une portion linéaire;

— existence de réponses différentes à une décharge partielle en cours de fluage suivant le blocage ou non des grains et la reprise — nulle, partielle ou totale — des grains bloqués (phénomènes d'« hésitation »);

— augmentation de la déformation de fluage causée par une mise en vibrations (pour des vibrations de faible amplitude) et réponse à l'arrêt des vibrations analogue à la réponse à une décharge partielle.

Il est clair que toutes ces propriétés, *qui n'existent pas pour un cristal isolé* ayant le même comportement que le grain élémentaire de notre modèle, sont directement liées à la désorientation des grains dans l'agrégat, et à la présence des contraintes internes dont elle est la source.

Cette première étude, qui repose sur une loi d'interaction insuffisante, n'a d'intérêt que comme point de comparaison et parce qu'elle permet des calculs développés conduisant à des conclusions claires : elle permet déjà de dégager un certain nombre de propriétés du polycristal qui ne peuvent être que modifiées et précisées à partir d'une loi d'interaction plus valable que celle de KRÖNER, mais non supprimées. C'est ce que nous verrons plus précisément à partir d'une « loi de KRÖNER modifiée ».

I. INTRODUCTION D'UNE LOI DE KRÖNER MODIFIÉE.

Suivant les conclusions du chapitre I, nous nous contenterons d'une loi *a priori*, moyenne, corrigeant l'évaluation des contraintes internes de la loi de KRÖNER dans le cas de la traction simple en pondérant le terme $[2\mu(1-\beta)]$ de la formule de KRÖNER par une fonction de la contrainte appliquée Σ , de la déformation plastique E^p et de la proportion de grains actifs prise en compte par le paramètre Y^* (et également, dans notre cas, du seuil d'écoulement τ_0). La « formule de KRÖNER modifiée » sera donc du type :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu(1-\beta)f(\Sigma, E^p, \tau_0, Y^*)(E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^i)$$

avec :

$$(II.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq f \leq 1 \\ \frac{\partial f}{\partial E^p} \leq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial Y^*} \leq 0 \\ f(\Sigma, 0, \tau_0, Y^*) = f(\Sigma, E^p, \tau_0, 2) = 1 \end{array} \right.$$

Dans ce chapitre, on gardera f sous sa forme générale en tirant de ses propriétés les principales conséquences sur le comportement du polycristal en traction simple.

En gardant toujours la même loi de distribution des orientations des grains, et la même loi de comportement du grain, on aura, sous une traction Σ_1 , pour les grains actifs :

$$\tau = \alpha_{33} \Sigma_1 + \mu (1 - \beta) f \cdot (3 \alpha_{33} E^p - \gamma) = \tau_0 + \eta \dot{\gamma}$$

si l'on fait comme dans toute la suite $C = 0$.

A. MISE EN CHARGE

$$a. \quad \Sigma_1 > \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$$

Dans ce cas tous les grains sont actifs dès le début. f ne dépendant pas de α_{33} , on obtient en procédant comme au chapitre précédent :

$$\eta \dot{E}^p + \mu (1 - \beta) (1 - 3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle) E^p f = \langle \alpha_{33}^2 \rangle \Sigma_1 - \langle \alpha_{33} \rangle \tau_0$$

Comme $\dot{E}^p$ doit toujours rester positif ou nul, on doit toujours avoir :

$$f \cdot E^p \leq \frac{\langle \alpha_{33}^2 \rangle \Sigma_1 - \langle \alpha_{33} \rangle \tau_0}{\mu (1 - 3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle) (1 - \beta)} = h$$

Cela signifie en particulier que lorsque $t \rightarrow \infty$, $f \cdot E^p$ tend vers une limite finie b comprise entre 0 et h (puisque $f \cdot E^p \geq 0$). Par conséquent quand $t \rightarrow \infty$, $\dot{E}^p$ a pour valeur limite :

$$\dot{E}_{\infty}^p = \frac{\langle \alpha_{33}^2 \rangle \Sigma_1 - \langle \alpha_{33} \rangle \tau_0 - \mu (1 - \beta) (1 - 3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle) \cdot b}{\eta}$$

Si $b < h$, cela signifie que le fluage est illimité et à vitesse constante à l'infini.

Si $b = h$, il ya deux possibilités :

— le fluage est illimité, mais la vitesse tend vers zéro;

— le fluage est limité : $E^p \rightarrow E_{\infty}^p = c$ avec :

$$cf \left(\Sigma_1, c, \tau_0, \frac{3\sqrt{6}}{2} \right) = \frac{\langle \alpha_{33}^2 \rangle \Sigma_1 - \langle \alpha_{33} \rangle \tau_0}{\mu (1-\beta) (1-3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle)}$$

comme $f < 1$, cela signifie :

$$c > \frac{\langle \alpha_{33}^2 \rangle \Sigma_1 - \langle \alpha_{33} \rangle \tau_0}{\mu (1-\beta) (1-3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle)}$$

Dans tous les cas, le fluage est donc plus important que pour le modèle précédent, et il peut être illimité. Par ailleurs la concavité de la courbe de fluage doit rester négative ou nulle. Comme l'on a :

$$\eta \ddot{E}^p = -\mu (1-\beta) (1-3 \langle \alpha_{33}^2 \rangle) \dot{E}^p \left(f + \frac{\partial f}{\partial E^p} \cdot E^p \right)$$

il faut que :

$$(II.26) \quad f + \frac{\partial f}{\partial E^p} \geq 0$$

Sous la charge constante $\Sigma_1 > \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$, l'équation d'écoulement dans les grains est :

$$\eta \dot{\gamma} + \mu (1-\beta) f \cdot \gamma = \alpha_{33} [\Sigma_1 + 3 \mu (1-\beta) f \cdot E^p] - \tau_0$$

On peut donc représenter γ sous la forme suivante :

$$\gamma = G(t) \alpha_{33} + H(t)$$

avec :

$$\begin{cases} \eta \dot{G} + \mu (1-\beta) f \cdot G = \Sigma_1 + 3 \mu (1-\beta) f \cdot E^p \\ \eta \dot{H} + \mu (1-\beta) f \cdot H = -\tau_0 \end{cases}$$

où :

$$G(0) = H(0) = 0; \quad \dot{G}(0) = \frac{\Sigma_1}{\eta} \text{ et } \dot{H}(0) = -\frac{\tau_0}{\eta};$$

$$E^p = G(t) \langle \alpha_{33}^2 \rangle + H(t) \langle \alpha_{33} \rangle$$

Il est facile de voir que l'on doit avoir :

$$\begin{aligned} -\frac{\tau_0}{\mu (1-\beta) f} &< H(t) < 0 \\ 0 &< G(t) < \frac{\Sigma_1 + 3 \mu (1-\beta) f \cdot E^p}{\mu (1-\beta) f} \end{aligned}$$

b.

$$2 \tau_0 < \Sigma_1 < \frac{3\sqrt{6}}{2} \cdot \tau_0$$

Dans ce cas, tous les grains ne sont pas actifs dès le début et l'on a :

$$\alpha_{33}^*(0) = \frac{\tau_0}{\Sigma_1} \quad Y^*(0) = \frac{\Sigma_1}{\tau_0} = Y_0^*$$

Avec les mêmes notations que pour le modèle précédent, et en utilisant la même méthode de calcul, on obtient cette fois :

$$\eta \dot{E}^p + \mu (1 - \beta) (1 - 3 [\alpha_{33}^2]) E^p f(\Sigma_1, E^p, \tau_0, Y^*) = [\alpha_{33}^2] [\Sigma_1 - [\alpha_{33}] \tau_0]$$

Pour les grains inactifs $\gamma = 0$ et $\tau < \tau_0$, ce qui entraîne :

$$Y^* = \frac{1}{\alpha_{33}} = \frac{\Sigma_1 + 3 \mu (1 - \beta) E^p f}{\tau_0}$$

et par suite :

$$\dot{Y}^* = \frac{3 \mu (1 - \beta)}{\tau_0} \cdot \frac{f + E^p \frac{\partial f}{\partial E^p}}{1 - \frac{3 \mu (1 - \beta)}{\tau_0} E^p \frac{\partial f}{\partial Y^*}} \cdot \dot{E}^p$$

Cela signifie, puisque par hypothèse $\frac{\partial f}{\partial Y^*} < 0$, qu'il n'y a entraînement de certains grains inactifs par les grains actifs (soit $\dot{Y}^* > 0$) que si l'on a :

$$f + E^p \frac{\partial f}{\partial E^p} \geq 0$$

c'est-à-dire si $f \cdot E^p$ est une fonction non décroissante de E^p . C'est l'hypothèse que nous avons déjà faite. (Dans le cas contraire il y aurait à partir d'un certain E^p , blocage différé de grains initialement actifs).

On a par ailleurs :

$$\eta \dot{E}^p = \tau_0 \left\{ [\alpha_{33}^2] Y_0^* - [\alpha_{33}] - \frac{1 - 3 [\alpha_{33}^2]}{3} (Y^* - Y_0^*) \right\}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\eta \cdot \frac{\tau_0 - 3 \mu (1 - \beta) E^p \frac{\partial f}{\partial Y^*}}{3 \mu (1 - \beta) \left(f + E^p \frac{\partial f}{\partial E^p} \right)} \dot{Y}^* = Y_0^* - Y^* + 3 [\alpha_{33}^2] Y^* - 3 [\alpha_{33}]$$

Cette équation ressemble beaucoup à celle du modèle précédent (loi de KRÖNER) et on peut en tirer les mêmes conclusions :

— si $2 < Y_0^* < Y_l^*$, avec Y_l^* défini comme le cas précédent ($Y_l^* \neq 2,757$), tous les grains ne sont pas entraînés au glissement;

— si $Y_l^* < Y_0^* < \frac{3\sqrt{6}}{2}$, tous les grains finiront par glisser.

Dans le premier cas la relation entre Y_0^* et Y_0^* est la même que dans le cas précédent; seule change la loi de variation de Y^* .

Deux facteurs concourent d'autre part à ralentir l'effet d'entraînement : < 1 et $\frac{\partial f}{\partial E^p} < 0$ d'une part, $\frac{\partial f}{\partial Y^*} < 0$ d'autre part. Le temps d'entraînement est donc plus long à contrainte égale, mais fini.

Enfin, on peut remarquer que, pour $2 < Y_0^* < Y_1^*$, le fluage peut être limité et illimité suivant la façon dont f dépend de Y^* .

B. RÉPONSE A UNE DÉCHARGE PARTIELLE EN COURS DE FLUAGE

$$\text{DANS LE CAS OÙ } \Sigma_2 > \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$$

On impose à l'instant θ une décharge d'amplitude $\Delta\Sigma$ telle que l'on ait :

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 - \Delta\Sigma > \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$$

avec Σ_2 constant.

Certains grains peuvent se bloquer aussitôt. f dépend donc maintenant de Y^* et de Σ_2 . Ecrivons pour simplifier :

$$f\left(\Sigma_1, E^p, \tau_0, \frac{3\sqrt{6}}{2}\right) = f_1 \quad \text{et} \quad f(\Sigma_2, E^p, \tau_0, Y^*) = f_2$$

avec :

$$f_2(\theta) = f[\Sigma_2, E^p(\theta), \tau_0, Y^*(\theta)].$$

La condition de blocage d'un grain de paramètre α_{33} s'écrit à l'instant θ :

$$\alpha_{33} \Sigma_2 + \mu (1 - \beta) f_2(\theta) [3 \alpha_{33} E^p(\theta) - \gamma(\theta)] < \tau_0$$

où en explicitant $\gamma(\theta)$:

$$Y^*(\theta) = \frac{1}{\alpha_{33}^*(\theta)} = \frac{\Sigma_2 + 3 \mu (1 - \beta) E^p(\theta) f_2(\theta) - \mu (1 - \beta) f_2(\theta) G(\theta)}{\tau_0 + \mu (1 - \beta) f_2(\theta) H(\theta)}$$

De même à l'instant t :

$$(27) \quad Y^* = \frac{1}{\alpha_{33}} = \frac{\Sigma_2 + 3 \mu (1 - \beta) f_2 E^p - \mu (1 - \beta) f_2 G(\theta)}{\tau_0 + \mu (1 - \beta) f_2 H(\theta)}$$

Par ailleurs, en partant de l'équation d'écoulement des grains actifs, et en faisant une moyenne sur tous les grains on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma \dot{E}^p + \mu (1 - \beta) f_2 E^p (1 - 3 [\alpha_{33}^2]) &= [\alpha_{33}^2] \Sigma_2 \\ &- [\alpha_{23}] \tau_0 + \mu (1 - \beta) f_2 [E^p(\theta) - [\alpha_{33}^2] G(\theta) - [\alpha_{33}] H(\theta)] \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire plus simplement par :

$$(II.28) \quad [\alpha_{33}^2] Y^* - [\alpha_{33}] = \frac{\eta \dot{E}^p + \mu (1 - \beta) f_2 [E^p - E^p(\theta)]}{\tau_0 + \mu (1 - \beta) f_2 H(\theta)}$$

Étudions quelques conséquences de cette relation :

a. *Signe de $\dot{Y}^*$.*

On trouve, en dérivant (II, 27) :

$$\dot{Y} = \dot{E}^p \cdot \frac{3\mu(1-\beta)f_3 + \frac{\partial f_2}{\partial E^p}(\tau_0 Y^* - \Sigma_2)}{f_2[\tau_0 + \mu(1-\beta)f_2 H(\theta)] - \frac{\partial f_2}{\partial Y^*}(\tau_0 Y^* - \Sigma_2)}$$

Dans le domaine étudié on a :

$$\begin{aligned} \dot{E}^p &> 0 \\ \tau_0 Y^* - \Sigma_2 &< 0 \end{aligned}$$

puisque :

$$Y^* < \frac{3\sqrt{6}}{2} < \frac{\Sigma_2}{\tau_0}$$

On a d'autre part, par hypothèse $\frac{\partial f_2}{\partial E^p} < 0$ et $\frac{\partial f_2}{\partial Y^*} < 0$. Enfin puisque l'on suppose que le blocage n'est pas total, cela signifie que $Y^* > 0$ et donc que :

$$\tau_0 + \mu(1 - \beta) f_2 H(\theta) > 0$$

Par suite on aura $\dot{Y}^* > 0$ à condition que :

$$(II.29) \quad \frac{\partial f_2}{\partial Y^*}(\tau_0 Y^* - \Sigma_2) < f_2[\tau_0 + \mu(1 - \beta) f_2 H(\theta)]$$

Nous supposons que la variation de f_2 en fonction de Y^* est suffisamment lente pour qu'il en soit bien ainsi. Cela entraîne donc que au moins certains grains initialement bloqués (ceux de faible α_{33}) seront débloqués par la suite

b. *Domaine de reprise incomplète :*

La limite supérieure de ce domaine est définie par la valeur de $Y^*c(\theta)$ qui rend Y^* égal à $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ pour un temps t infini. Or il est facile de voir que, l'intérieur de ce domaine, la déformation E^p doit nécessairement tendre vers une limite finie. Soit E_c^p cette limite correspondant à :

$$Y^*_{\text{lim}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

f_{2c} la valeur de :

$$f_2 \left(\Sigma_2, E_c^p, \tau_0, \frac{3\sqrt{6}}{2} \right)$$

On trouve alors :

$$E_c^p = \frac{\left(\langle \alpha_{33}^2 \rangle \frac{3\sqrt{6}}{2} - \langle \alpha_{33} \rangle \right) [\Sigma_2 H(\theta) + \tau_0 G(\theta)] + E^p(\theta) \left(\Sigma_2 - \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0 \right)}{\Sigma_2 - Y_l^* \tau_0}$$

$Y_l^* \neq 2,757$ est la valeur définie précédemment. On trouve également pour f_{2c} :

$$f_{2c} = \frac{\Sigma_2 - Y_l^* \tau_0}{\mu (1 - \beta) [G(\theta) + H(\theta) Y_l^* - 3 E^p(\theta)]}$$

Or comme on a :

$$f_2(\theta) = \frac{\Sigma_2 - Y_l^*(\theta) \tau_0}{\mu (1 - \beta) [G(\theta) + H(\theta) Y_c^*(\theta) - 3 E^p(\theta)]}$$

que, f_2 décroissant avec le temps, on doit avoir $f_{2c} < f_2(\theta)$ on obtient :

$$Y_c^*(\theta) < Y_l^*$$

Cela signifie que le domaine de reprise incomplète, défini par $(2 < Y^*(\theta) < Y_l^*)$, est plus restreint que dans le cas précédent.

c. *Concavité de la courbe de fluage après la décharge partielle.*

Cette concavité est donnée par le signe de $\ddot{E}^p$, que l'on peut calculer à partir de la relation (II.28). On trouve, tous calculs faits :

$$\begin{aligned} \ddot{E}^p = & \frac{\mu (1 - \beta) \dot{E}^p [\tau_0 + \mu (1 - \beta) f_2 H(\theta)]}{[\tau_0 + \mu (1 - \beta) f_2 H(\theta)]^2 - \mu (1 - \beta) [3 E^p \tau_0 - G(\theta) \tau_0 - H(\theta) \Sigma_2]} \frac{\partial f_2}{\partial Y^*} \\ & \times \left\{ - \left(f_2 + E^p \frac{\partial f_2}{\partial E^p} \right) [\tau_0 + \mu (1 - \beta) f_2 H(\theta)] (1 - 3 [\alpha_{33}^2]) \right. \\ & + [\tau_0 + \mu (1 - \beta) f_2 H(\theta)] \frac{\partial f_2}{\partial E^p} (E^p(\theta) - G(\theta) [\alpha_{33}^2] - H(\theta) [\alpha_{33}]) \\ & \left. - \frac{\partial f_2}{\partial Y^*} (\Sigma_2 - \tau_0 Y^* + 3 \mu (1 - \beta) f_2 [E^p - E^p(\theta) - H(\theta) Y^* [\alpha_{33}^2] - [\alpha_{33}]] \right\} \end{aligned}$$

On remarque sur cette formule que :

- lorsque $f_1 = f_2 = 1$, on retrouve la formule du modèle précédent, donnant une concavité toujours négative;
- lorsque f_2 dépend de E^p , mais pas de Y^* , la concavité est encore négative;
- lorsque f_2 dépend également de Y^* , avec $\frac{\partial f_2}{\partial Y^*} < 0$ la concavité peut

devenir positive, quitte à changer de signe au bout d'un certain temps. C'est en particulier le cas si tous les grains finissent par se remettre en mouvement puisque à partir de ce moment, la concavité est négative comme on l'a montré plus haut.

Il reste à vérifier que la condition restrictive (II.29) portant sur $\frac{\partial f_2}{\partial Y^*}$ n'est pas contradictoire avec une telle propriété. Il suffit de le faire à l'instant θ_+ la condition $\dot{E}^p(\theta_+) > 0$ où l'on donne à $\frac{\partial f_2}{\partial Y^*}$ sa valeur limite fixée par (II.29) devient :

$$\left[3\mu(1-\beta)f_2^2(\theta) - (\Sigma_2 - \tau_0 Y^*(\theta)) \frac{\partial f_2}{\partial E^p}(\theta) \right] [(\Sigma_2 - \tau_0 Y^*(\theta)) [\alpha_{33}^2] - \mu(1-\beta)f_2(\theta) H(\theta) \{ Y^*(\theta) [\alpha_{33}^2] - [\alpha_{33}] \}] > 0$$

Or il est facile de voir que chacun des deux facteurs de cette expression est positif. Ainsi un choix adéquat de $\frac{\partial f_2}{\partial Y^*}$ permet à la fois l'effet d'entraînement et un début de reprise accéléré (ce qui n'était pas possible avec le modèle « S.K. B. »).

d. Calcul du temps d'hésitation.

La formule (II.28) s'écrit également :

$$\eta \dot{E}^p = [\tau_0 + \mu(1-\beta)f_2 H(\theta)] \left\{ \frac{Y^*(\theta) - Y^*}{3} + [\alpha_{33}^2] Y^* - [\alpha_{33}] \right\} + \frac{1}{3} [\Sigma_2 - \tau_0 Y^*(\theta)] \left[1 - \frac{f_2}{f_2(\theta)} \right]$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \eta \dot{Y}^* = & \frac{3\mu(1-\beta)f_2^2 + \frac{\partial f_2}{\partial E^p}(\tau_0 Y^* - \Sigma_2)}{f_2[\tau_0 + \mu(1-\beta)f_2 H(\theta)] - \frac{\partial f_2}{\partial Y^*}(\tau_0 Y^* - \Sigma_2)} \times \left\{ \left\{ \frac{Y^*(\theta) - Y^*}{3} + [\alpha_{33}^2] Y^* - [\alpha_{33}] \right\} [\tau_0 + \mu(1-\beta)f_2 H(\theta)] \right. \\ & \left. + \frac{\Sigma_2 - \tau_0 Y^*(\theta)}{3} \left[1 - \frac{f_2}{f_2(\theta)} \right] \right\} \end{aligned}$$

soit : $\eta \frac{dY}{dt} = \mathcal{F}(E^p, Y^*)$, où E^p est lui-même fonction de Y^* . Le temps d'hésitation T_H est donc donné par :

$$T_H = \int_{Y^*(\theta)}^{\frac{3\sqrt{6}}{2}} \frac{\eta dY^*}{\mathcal{F}(E^p, Y^*)}$$

A partir de l'expression de $\bar{F}(E^p, Y^*)$ il est possible, en particulier, de montrer que, contrairement aux propriétés du modèle « S.K.B. », on peut obtenir un temps d'hésitation limite fini, quand $\theta \rightarrow \infty$, et pour Σ_1 et Σ_2 fixés.

e. *Variation de f en fonction de Y^* .*

On peut, en première approximation, étendre la validité de la loi de KRÖNER ($f = 1$), au cas où la proportion de grains actifs est telle que l'on puisse considérer que, en moyenne, chaque grain actif n'est en contact qu'avec des grains « loqués ». Il est facile de voir que, par exemple, pour un empilement en « tas de boulets » de boules sphériques de même rayon — empilement qui réalise la compacité maximum [14] cette proportion limite est de $1/4$; ce qui correspond à une valeur $Y^* \neq 2,07$.

L'existence d'une telle zone où $f = 1$ quelque soit E^p , pour $2 < Y^* < 2,07$, garantirait l'existence d'un domaine de reprise incomplète après décharge partielle (puisque l'on a nécessairement $2,07 \leq Y_c^*(\theta) < Y_l^*$), ainsi que celle d'un domaine de fluage limité.

C. CONCLUSIONS

On voit donc que l'introduction d'une loi de KRÖNER modifiée permet des possibilités plus grandes que le modèle « S.K.B. »; il s'agit principalement des améliorations suivantes :

- deux régimes distincts de fluage, l'un limité, l'autre illimité;
- par conséquent un module d'écrouissage décroissant avec la déformation plastique et pouvant tendre vers zéro;
- un domaine d'hésitation plus étendu;
- la possibilité d'obtenir un changement de courbure de la courbe de fluage après décharge partielle.

Nous verrons maintenant que, en dépit de la simplicité du modèle (*hypothèse d'un seul système de glissement, loi de comportement linéaire, même profil d'écoulement initial pour tous les grains...*), celui-ci rend compte qualitativement et, pour une assez grande part, quantitativement de l'essentiel des résultats expérimentaux.

CHAPITRE III

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

L'étude expérimentale a porté sur les principaux points dégagés plus haut :

- écouissage en traction simple, à vitesse de déformation constante;
- détermination de différents régimes de fluage en traction simple;
- effet d'une surcharge ou d'une décharge partielle en cours de fluage (en traction simple);
- influence de vibrations superposées à une charge constante en traction simple.

On a opéré sur des fils minces de cuivre polycristallin, préalablement recuits, et « commercialement purs ». Les essais rapides (écrouissage) ou ne nécessitant pas une grande précision (détermination des différents domaines de fluage) ont été faits à la température ambiante. Les essais de longue durée et nécessitant une grande précision ont été faits sous enceinte thermique, à température maintenue constante (26 °C).

Le cuivre a été préféré parce qu'il est un représentant typique des métaux cubiques à faces centrées (système C.F.C.), que la zone de glissement simple est relativement grande (comparée à celle de l'aluminium, par exemple), et que sa grande ductilité permet d'observer des déformations plastiques importantes, même à température ordinaire et sous de faibles contraintes.

Les conditions de recuit (deux heures à 550 °C dans une atmosphère d'argon) ont permis une bonne isotropie initiale, la taille des grains étant très faible (de l'ordre de 10 μ) et l'effet de surface étant ainsi rendu négligeable, malgré le faible diamètre des fils ($\varnothing = 0,5$ mm).

I. ÉCROUISSAGE EN TRACTION SIMPLE.

Les essais ont été menés sur une machine Instron, à vitesse de déplacement imposée, sur des fils suffisamment longs (20 cm) pour que la vitesse de déformation puisse être considérée comme constante.

1. *Influence de la vitesse de déformation.*

La gamme de vitesses de déformation imposées a été limitée supérieurement à $1,5 \cdot 10^{-3}$ /s à cause du temps de réponse du système enregistreur, et inférieurement à 10^{-6} /s à cause des perturbations dues aux variations de température

trois courbes typiques sont reproduites sur la figure 14 (après correction de la valeur des contraintes due aux variations de section). On voit que, même dans le domaine restreint exploré, l'influence de la vitesse de déformation n'est pas négligeable.

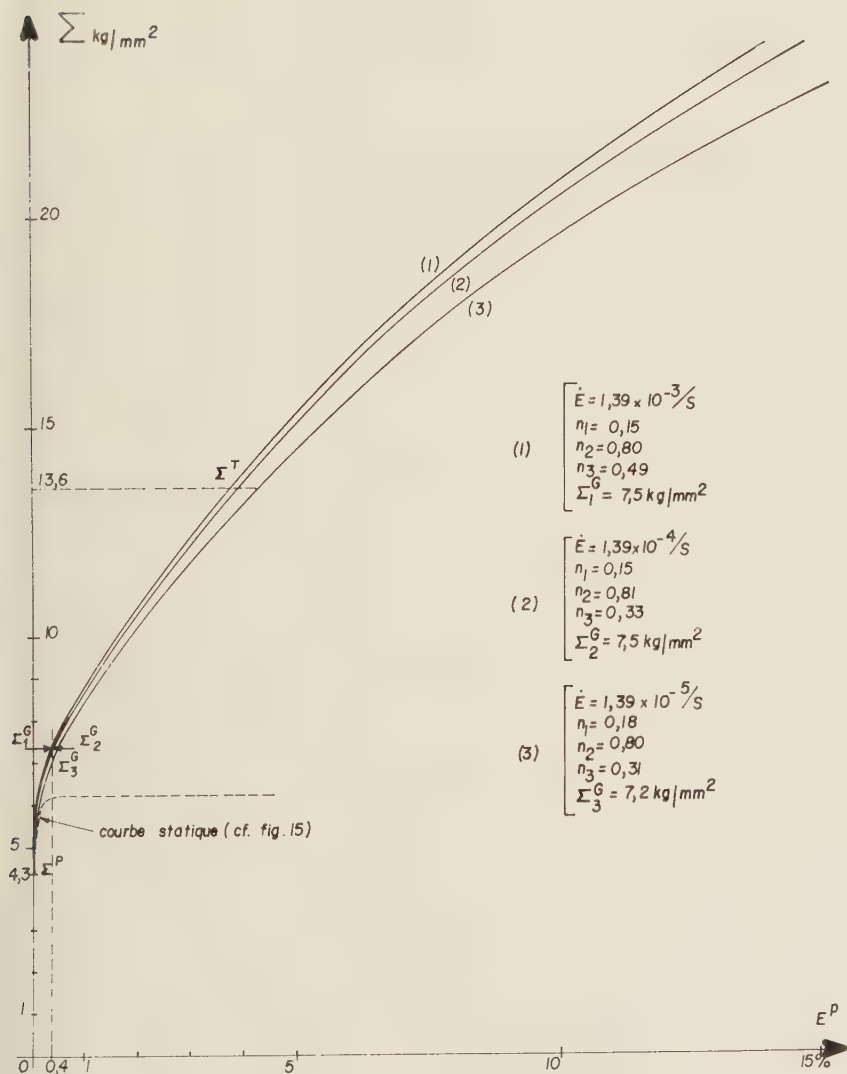


FIG. 14. — Courbes d'écroutissage à $\dot{E} = \text{cte}$ (fils de cuivre)

2. Expression analytique des courbes d'érouissage.

On a analysé les courbes (Σ, E^p) ainsi obtenues par la méthode des différences finies [15] qui permet une analyse très fine des courbes paraboliques ne nécessitant ni la mesure des pentes ni l'appréciation de la valeur « initiale » de la contrainte. Les résultats, pour des vitesses de déformation variant de 1 à 1 000, se résument ainsi : chaque courbe d'érouissage (Σ, E^p) , pour une vitesse de déformation totale donnée $\dot{E}$, présente quatre portions distinctes :

1° Une partie élastique jusqu'à $\Sigma = \Sigma^p$, correspondant au premier seuil de plasticité;

2° Une partie parabolique, entre Σ^p et Σ^G , qui peut s'exprimer par la formule : $\Sigma = k_1 (E^p)^{n_1}$ avec n_1 de l'ordre de 0,15;

3° Une partie quasi linéaire, entre Σ^G et Σ^T , s'exprimant par la formule : $\Sigma = k_2 (E^p)^{n_2}$ avec n_2 de l'ordre de 0,80;

4° Une partie parabolique, au-delà de Σ^T et jusqu'à la rupture, s'exprimant par : $\Sigma = k_3 (E^p)^{n_3}$ avec n_3 variant suivant la vitesse de déformation, entre 0,30 et 0,50.

On observe en plus que Σ^p est à peu près constant dans la gamme de $\dot{E}$ étudiée, soit $\Sigma^p \approx 4,3$ kg/mm². Par contre Σ^G croît assez sensiblement avec $\dot{E}$, la valeur de E^p correspondant à Σ^G restant au contraire constante, et de l'ordre de 4×10^{-3} . Les valeurs de Σ^T sont indépendantes de $\dot{E}$ ($\Sigma^T = 13,6$ kg/mm²).

Si l'on se réfère au modèle du chapitre précédent, on peut interpréter les domaines précédents de la façon suivante :

● Pour $\Sigma < \Sigma^p$, il n'y a écoulement plastique dans aucun des grains. Σ^p correspond à la valeur de Σ pour laquelle $\tau = \tau_0$ quand $\alpha_{33} = 1/2$. Ceci entraîne que τ_0 doit être de l'ordre de $(\Sigma^p/2)$ soit 2,15 kg/mm².

● Pour $\Sigma^p < \Sigma < \Sigma^G$, les grains se mettent progressivement en mouvement. Σ^G correspondant à une plastification totale $\left(Y^* = \frac{3\sqrt{6}}{2} \right)$. On doit avoir, d'après le modèle (cf. § II.1.A.b) :

$$Y_l^* \tau_0 < \Sigma^G < \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$$

soit, pour $\tau_0 = 2,15$ kg/mm² :

$$5,9 \text{ kg/mm}^2 < \Sigma^G < 7,9 \text{ kg/mm}^2$$

Σ^G étant fonction croissante de la vitesse de déformation. Or c'est bien dans ce domaine que varie Σ^G , la valeur inférieure, soit 5,9 kg/mm², devant correspondre à la courbe statique ($\dot{E}^p = 0$).

● Pour $\Sigma^G < \Sigma < \Sigma^T$, tous les grains sont plastifiés et dans le cas du modèle « S.K.B. » l'écroutissage est linéaire pour $\dot{E}^p$ constant et de pente supérieure ou égale à :

$$\mu^p = \mu (1 - \beta) \frac{1 - 3 < \alpha_{11}^2 >}{< \alpha_{11}^2 >}$$

et $\mu^p \neq \mu = 4\,000 \text{ kg/mm}^2$. On a vu que l'introduction d'une fonction $(\Sigma, \dot{E}^p, \tau_0, Y^*)$ permettait d'abaisser considérablement cette valeur, ce qui est en nécessaire puisque, dans nos expériences, on trouve $\mu^p \neq 200 \text{ kg/mm}^2$ et de l'ordre de $\mu/20$.

● Enfin on peut supposer que pour $\Sigma > \Sigma^T$, l'hypothèse d'un seul système de glissement est fortement erronée. C'est ce que remarque JAOUL [16] qui observe les mêmes domaines que ceux définis ci-dessus en attribuant le second à la présence des joints de grains, le troisième à la diminution de leur nombre, et le quatrième à la présence de mécanismes de « cross-slip », rendus possibles par la propagation plus facile des dislocations arrachées à leurs obstacles (barrières de COTTRELL, etc.).

Toutes les expériences ultérieures ont été faites pour $\Sigma < \Sigma^T = 13,6 \text{ kg/mm}^2$, c'est-à-dire, à l'extérieur d'un domaine où le glissement multiple joue un rôle prépondérant.

DOMAINES DE FLUAGE EN TRACTION SIMPLE.

On a étudié de la même façon les courbes de fluage en traction simple, pour différentes valeurs de la contrainte Σ . La mesure des déformations a été faite par lecture directe de l'allongement à l'aide d'un cathétomètre appréciant centième de millimètre, ce qui, pour une longueur utile du fil de 1 mètre, permet d'estimer des déformations de 10^{-5} .

On n'a noté aucune déformation retardée pour des contraintes inférieures à 3 kg/mm^2 . A partir de cette valeur on observe un fluage faible et limité, dont l'amplitude croît avec la contrainte. Au-delà de $\Sigma = 6,2 \text{ kg/mm}^2$ le fluage est beaucoup plus important et devient illimité, la vitesse de fluage étant cependant très faible.

On retrouve donc en gros les distinctions déjà faites dans le cas de la mise en charge à vitesse de déformation constante. Le domaine élastique ($\Sigma < \Sigma^p$) correspond à l'absence de fluage. Le domaine suivant (plastification incomplète) correspond à un fluage limité, le troisième domaine à un fluage illimité (fig. 15). Cependant on remarque que la limite du deuxième domaine (Σ^G) est plus basse dans le cas du fluage que dans celui de la traction à vitesse de déformation imposée. Cela est conforme à notre modèle puisque les essais de fluage correspondent à une vitesse de déformation tendant vers zéro (courbe « statique »). Selon les calculs du chapitre précédent, le fluage devrait devenir illimité à partir de la contrainte $\Sigma = Y^* \cdot \tau_0$, c'est-à-dire, avec les valeurs données au paragraphe précédent, à partir de $\Sigma \neq 5,9 \text{ kg/mm}^2$. La valeur trouvée expérimentalement ($\Sigma = 6,2 \text{ kg/mm}^2$) n'en est pas très éloignée. Enfin la coïncidence

entre la limite d'élasticité Σ^p et la limite inférieure du domaine de fluage limité est également conforme au modèle étudié (avec une loi de KRÖNER « modifiée » ou non).

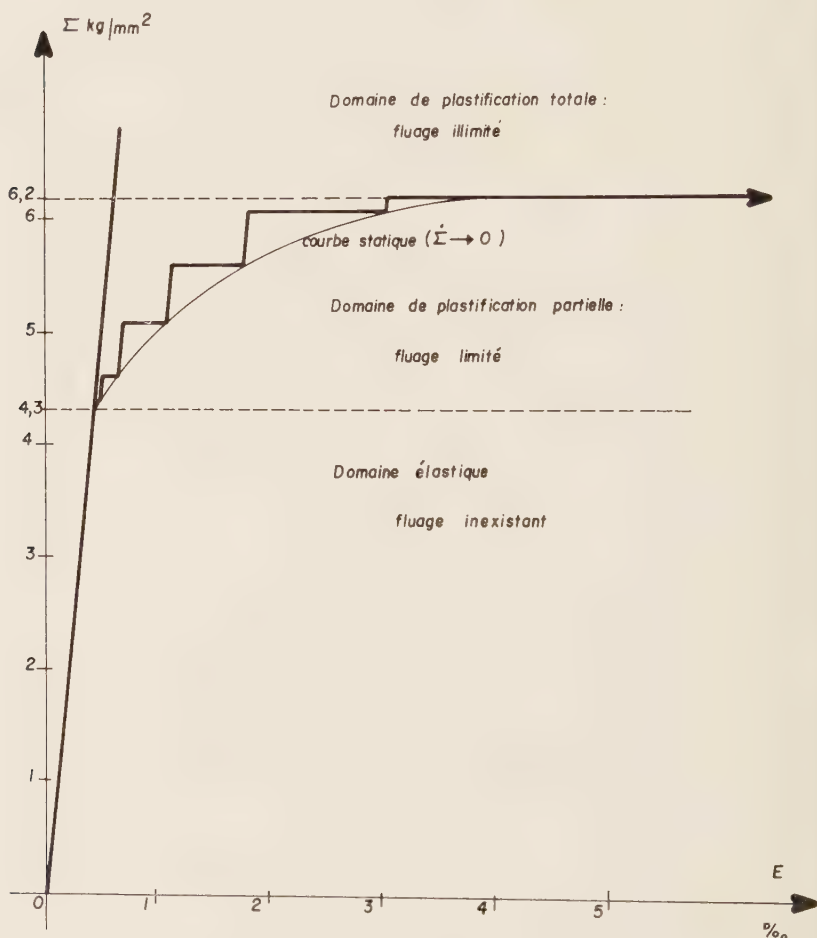


FIG. 15. — Domaines de fluage en traction simple

III. INFLUENCE DE VARIATIONS DE CONTRAINTE SUR LE FLUAGE DU CUIVRE POLYCRISTALLIN (TRACTION SIMPLE).

Les variations de contraintes étudiées ont été de trois types :

- vibrations sinusoïdales superposées à une contrainte constante;
- surcharge en cours de fluage;
- décharge partielle en cours de fluage.

A. ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE VIBRATIONS

Les expériences consistent à soumettre un fil métallique (cuivre recuit) à une contrainte de traction constante Σ_0 à laquelle on superpose une contrainte sinusoidale de faible amplitude $\tilde{\Sigma}_1$ et de pulsation ω_1 . $\tilde{\Sigma}_1$ est telle que $\Sigma_0 - \tilde{\Sigma}_1$ est suffisante pour entraîner un fluage illimité du matériau. Il s'agit alors, en restant identique pour tous les essais, d'étudier l'influence de la vibration sur le fluage de l'éprouvette, en faisant varier les paramètres suivants : $\tilde{\Sigma}_1$, ω_1 et θ_1 (θ_1 est le temps au bout duquel on impose une discontinuité du régime de charge portant soit sur $\tilde{\Sigma}_1$ soit sur ω_1). Tous les trajets de charge étudiés peuvent s'exprimer sous la forme générale :

$$I.1) \Sigma = \Sigma_0 Y(t) + \tilde{\Sigma}_1 \sin[\omega_1(t - \theta_1)] Y(t - \theta_1) + \tilde{\Sigma}_2 \sin[\omega_2(t - \theta_2)] Y(t - \theta_2)$$

où $Y(t)$ est la fonction « échelon » de HEAVYSIDE.

Dispositif expérimental.

Il se compose de trois unités (fig. 16) :

a. *Unité d'excitation* : Deux excitateurs électromagnétiques de vibrations, reliés par une traversée métallique légère, imposent à l'éprouvette une force de traction constante, à laquelle se superpose une force sinusoidale d'amplitude de fréquence réglables. Les pièces sont montées sur des supports en béton; le socle, lui-même en béton, est monté sur « vibrachocs » — le tout pour éliminer les vibrations parasites;

b. *Unité de mesure* : Un capteur inductif de déplacement mesure le déplacement de la traverse liée à l'extrémité mobile de l'éprouvette, l'indication est transmise à un pont de mesure à lecture directe, relié à un enregistreur continu. La fréquence, contrainte et déformation alternatives sont observées sur oscilloscope. Le système permet d'apprécier jusqu'à des déplacements de l'ordre du centième de micron.

c. *Unité de régulation thermique* : l'éprouvette est placée dans une enceinte calorifugée dont la température est maintenue constante à 26 °C grâce à une régulation par thermomètre à contact.

Conditions d'expérimentation.

Pour assurer une répartition de la contrainte de traction sensiblement homogène dans toute l'éprouvette, il faut opérer à des fréquences pour lesquelles les effets d'inertie dus à la masse propre du fil sont négligeables. D'autre part la gamme de fréquence est encore limitée par la première résonance du système traverse. Avec une traverse mobile de masse $m = 25$ g, et un fil de 0,5 mm de diamètre et de 30 mm de longueur, on a ainsi pu opérer à des fréquences

comprises entre 15 et 200 Hz; la déformation minimum appréciable étant de l'ordre de $0,5 \times 10^{-6}$. La contrainte constante Σ_0 est de $9,5 \text{ kg/mm}^2$.

Il est impossible d'évaluer la déformation instantanée initiale du fil. En effet, une partie du déplacement initial observé, d'amplitude irrégulière, se

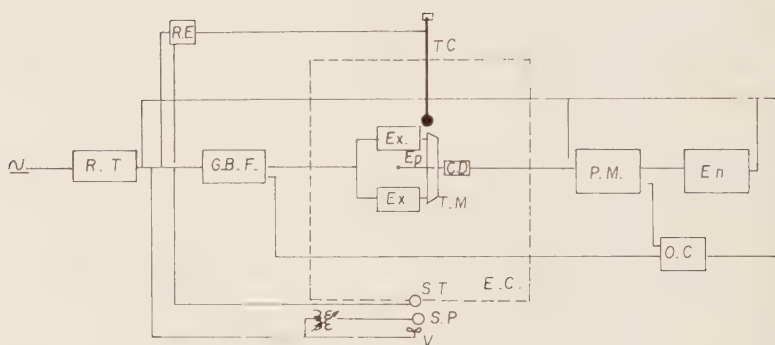


FIG. 16. — Schéma du dispositif expérimental (vibrations) :

- R.T. = régulateur de tension;
- R.E. = relais électronique;
- T.C. = thermomètre à contact;
- S.P. = source de chaleur permanente;
- S.T. = source de chaleur temporaire;
- E.C. = enceinte calorifugée;
- V = ventilateur;
- G.B.F. = générateur basse fréquence;
- Ex = excitateur de vibrations;
- Ep = éprouvette (fil de cuivre);
- C.D. = capteur de déplacement;
- P.M. = pont de mesure;
- En = enregistreur;
- O.C. = oscilloscope cathodique;
- T.M. = traverse mobile.

fait sans déformation : les fils disposés horizontalement ne sont pas initialement parfaitement tendus.

Mise à part cette translation d'amplitude variable, les courbes de fluage dans des conditions d'expériences identiques, ne sont pas parfaitement superposables du fait que les éprouvettes ont des sections et des longueurs initiales qui ne sont pas rigoureusement identiques. Cet inconvénient est cependant facilement levé par le fait que les courbes « déplacement-temps » se déduisent l'une de l'autre, en plus de la translation précédente, par une simple affinité de rapport très voisin de 1.

Résultats expérimentaux.

a. *Essai statique* ($\tilde{\Sigma}_1 - \tilde{\Sigma}_2 = 0$) : on a trouvé un fluage « parabolique » avec un faible exposant ($n \neq 0,05$). On n'a pas observé de fluage établi à vitesse constante, mais tout au plus une décroissance moins rapide que celle fixée par la courbe de départ; la déformation de fluage E^p peut se mettre sous la forme :

$$(II.2) \quad E^p - E_0^p = k^{(s)} t^{0,05} (+ a^{(s)} \cdot t)$$

avec, pour $\Sigma_0 = 9,55 \text{ kg/mm}^2$: $k^{(s)} = 7,35 \cdot 10^{-3}$ et $a^{(s)} \neq 10^{-6}$ pour t exprimé en heures. (E_0^p ne peut pas être évalué directement de façon sûre).

b. *Essais dynamiques.*

α. Mise en vibrations dès le début de l'expérience. ($\theta_1 = 0, \Sigma_2 = 0$) : pour les faibles amplitudes de vibrations qui ont été imposées ($\tilde{\Sigma}_1 < 0,35 \text{ kg/mm}^2$), on a trouvé un comportement dynamique tout à fait analogue au comportement statique, la déformation moyenne se mettant sous la forme :

$$(II.3) \quad E^p - E_0^p = k^{(d)} \cdot t^{0,05} (+ a^{(d)} t)$$

où, t étant exprimé en heures, $k^{(d)} \neq k^{(s)}$ (quoique légèrement supérieur) et $a^{(d)} \neq a^{(s)}$. Seul E_0^p semble être nettement plus important dans le cas dynamique que dans le cas statique. Cette différence peut être appréciée par les essais suivants.

β. Mise en vibrations à l'instant θ_1 : elle se traduit par une brusque augmentation de la vitesse de déformation.

— Si l'on compare des courbes correspondant, toutes choses égales par ailleurs, à des θ_1 différents, on constate qu'au bout d'un temps suffisant, elles sont identiques (fig. 17). On en a tiré la conclusion qu'on retrouvait, pour $\theta_1 \neq 0$, au bout d'un certain temps, la courbe correspondant à $\theta_1 = 0$: ce qui permet d'apprécier la différence ($E_0^{(d)} - E_0^{(s)}$) inaccessible autrement.

— Si $\Delta E^p(t - \theta_1, \theta_1)$ représente la différence, au temps t , entre la déformation de fluage dynamique correspondant à une mise en vibrations à l'instant θ_1 , et celle statique correspondant à la contrainte Σ_0 , on a trouvé que pour un même $\tilde{\Sigma}_1$, mais des θ_1 différents ($\theta_1 = 1/2 \text{ h}, 1 \text{ h}, 2 \text{ h}, 4 \text{ h}, 8 \text{ h}$) — et au moins tant que la vitesse de variation de ΔE^p est grande devant les erreurs qu'on peut commettre sur l'extrapolation de la courbe statique — $\Delta E^p(t - \theta_1, \theta_1)$ ne dépend en fait que du rapport : $\frac{t - \theta_1}{\theta_1}$ autrement dit de $\frac{t}{\theta_1}$ (fig. 18).

Il semble toutefois que cette propriété de similitude ne soit valable que tant que $\tilde{\Sigma}_1/\Sigma_0$ est très faible (ce qui est le cas dans nos essais). Elle implique l'effet que pour un même $\tilde{\Sigma}_1$, toutes les courbes correspondant à des θ_1 différents soient identiques au bout d'un certain temps et donc que la courbe correspondant à $\theta_1 = 0$ se déduise de la courbe statique par la simple *translation*

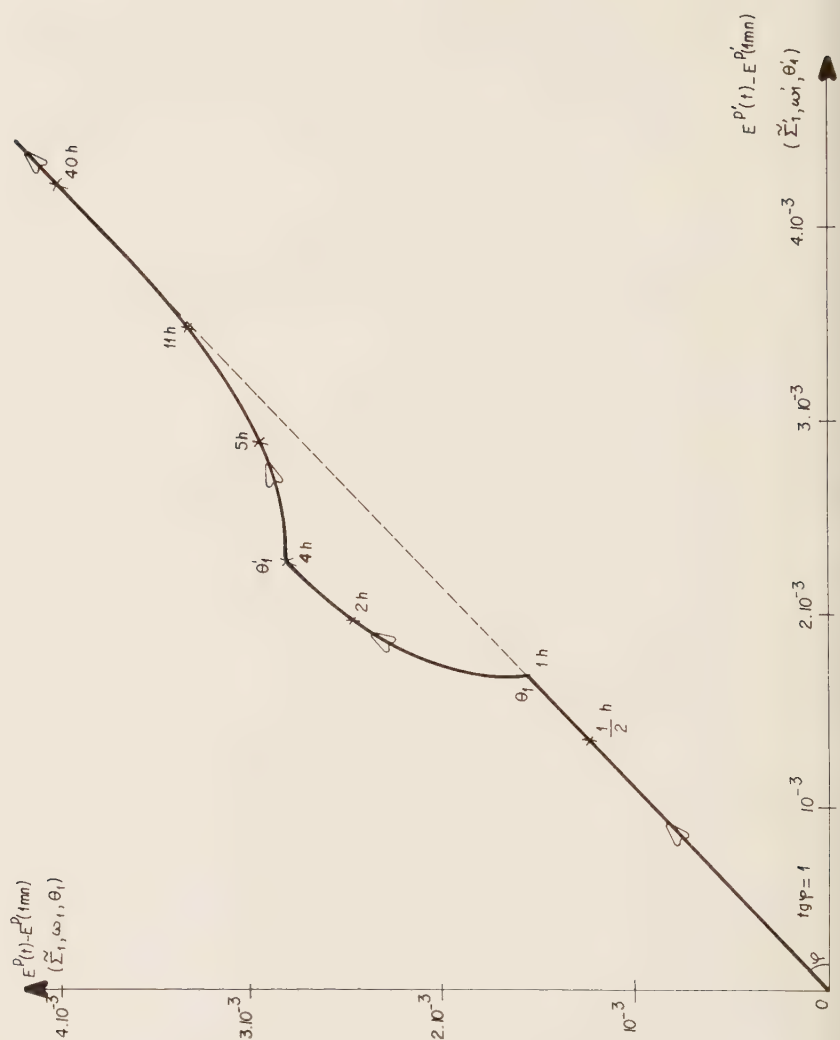


FIG. 17. — Comparaison de deux courbes de fluage correspondant à une mise en vibration à des instants différents ($\theta_1 \neq \theta'_1$) :

$$\Sigma_0 = 9,55 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\Sigma_1 = \Sigma'_1 = 0,22 \text{ Kg/mm}^2$$

$$\nu_1 = \nu'_1 = 30 \text{ Hz}$$

$$\theta_1 = 1 \text{ h}$$

$$\theta'_1 = 4 \text{ h}$$

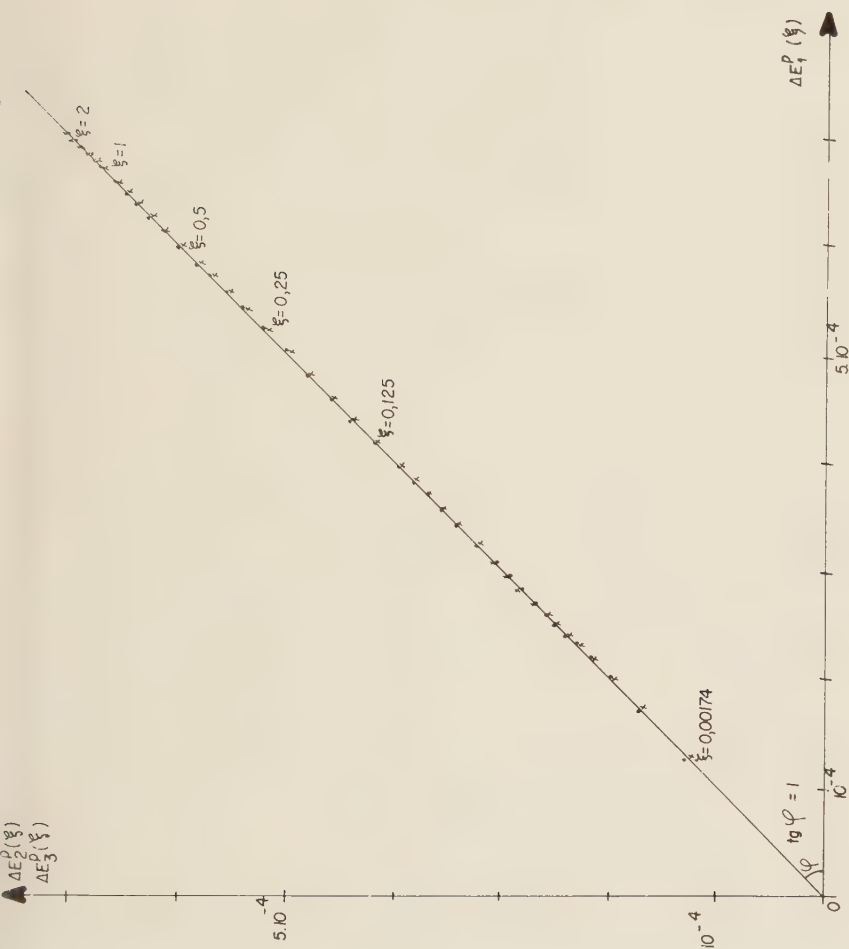


FIG. 18. — Comparaison, pour différents θ_1 de courbes $\Delta E^p(\xi)$ où $\xi = \frac{t - \theta_1}{\theta_1}$.

$$\Delta E_1^p(\xi) : \frac{\sum_1}{\sum_0} = 2,3 \% ; \theta_1 = 1 \text{ h}$$

$$(\cdot) \Delta E_2^p(\xi) : \frac{\sum_1}{\sum_0} = 2,3 \% ; \theta_1 = 4 \text{ h}$$

$$(x) \Delta E_3^p(\xi) : \frac{\sum_1}{\sum_0} = 2,3 \% ; \theta_1 = 8 \text{ h}$$

$(E_0^{(d)} - E_0^{(s)})$, c'est-à-dire que $k^{(d)} = k^{(s)}$ — ce qui n'est vraisemblable que pour de faibles valeurs de $\tilde{\Sigma}_1/\Sigma_0$.

— On a observé de plus une relation linéaire entre la valeur limite (pour $t \rightarrow \infty$) de ΔE^p et la valeur correspondante de $\tilde{\Sigma}_1$, le rapport $\tilde{\Sigma}_1/\Delta E^p_{\text{lim}}$ étant égal à 290 kg/mm². (A titre de comparaison, le module plastique tangent au point $\Sigma = \Sigma_0$ d'une courbe (Σ, E^p) à vitesse de déformation constante $\dot{E} = 1,2 \times 10^{-2}/s$ est de 200 kg/mm²). Par contre, au début de la mise en vibration (t de l'ordre de θ_1), ΔE^p croît plus vite que linéairement avec $\tilde{\Sigma}_1$ (fig. 19).

— Enfin, dans la gamme de fréquences explorée (entre 15 et 200 Hz) on n'a observé que des différences insignifiantes entre les courbes de fluage correspondant à des fréquences différentes, mais à des $\tilde{\Sigma}_1$ et θ_1 égaux.

γ. Arrêt des vibrations à l'instant θ_2 (pour $\theta_1 = 0$).

L'arrêt des vibrations, bien qu'il ne modifie pas la valeur de la contrainte moyenne Σ_0 , entraîne une diminution sensible de la vitesse de fluage. De plus, contrairement à ce que l'on a observé dans le cas précédent, les courbes correspondant à un même $\tilde{\Sigma}_1$, mais à des θ_1 différents, ne tendent pas à se rejoindre au bout d'un certain temps : il subsiste toujours entre elles un certain décalage la déformation étant toujours plus importante pour les essais correspondant à des θ_2 plus grands (fig. 20), mais devenant, au bout d'un certain temps inférieure à celle que l'on aurait observée pour un essai statique à la contrainte Σ_0 .

On a là encore évalué la diminution de fluage $\Delta E^p(t - \theta_2, \theta_2)$ causée par l'arrêt des vibrations à l'instant θ_2 , par différence avec la courbe dynamique extrapolée. Pour un même $\tilde{\Sigma}_1$ et des θ_2 différents, on n'a pas observé la propriété de similitude signalée dans le cas précédent : cette fois ΔE^p n'est plus seulement fonction de t/θ_2 .

Pour un même θ_2 et des $\tilde{\Sigma}_1$ différents, il n'y a pas non plus, de relation simple entre les différentes courbes. On a observé pour certaines conditions de contrainte, la présence d'un point d'inflexion pour $t > \theta_2$ après arrêt des vibrations. Enfin, pour des $\tilde{\Sigma}_2$ élevés (obtenus seulement, étant données les limites de l'appareillage utilisé, pour des fréquences proches d'une fréquence de résonance) on a constaté que l'arrêt des vibrations entraînait le blocage quasi-total de la déformation de fluage.

L'ensemble de ces comportements n'a pas été systématisé dans l'optique de l'étude de la propriété de « hésitation au fluage », celle-ci n'ayant été clairement analysée que sur des essais de décharge partielle en cours de fluage. Cependant, comme on le verra plus loin, les résultats observés après arrêt des vibrations entrent tout à fait dans le cadre des propriétés d'hésitation, et ceci à double titre : d'une part l'arrêt des vibrations a qualitativement le même effet qu'une décharge partielle pour un essai statique; d'autre part à l'intérieur même de chaque cycle de vibration, il peut se produire, suivant les conditions de contrainte, une période d'hésitation au fluage (cf. plus loin).

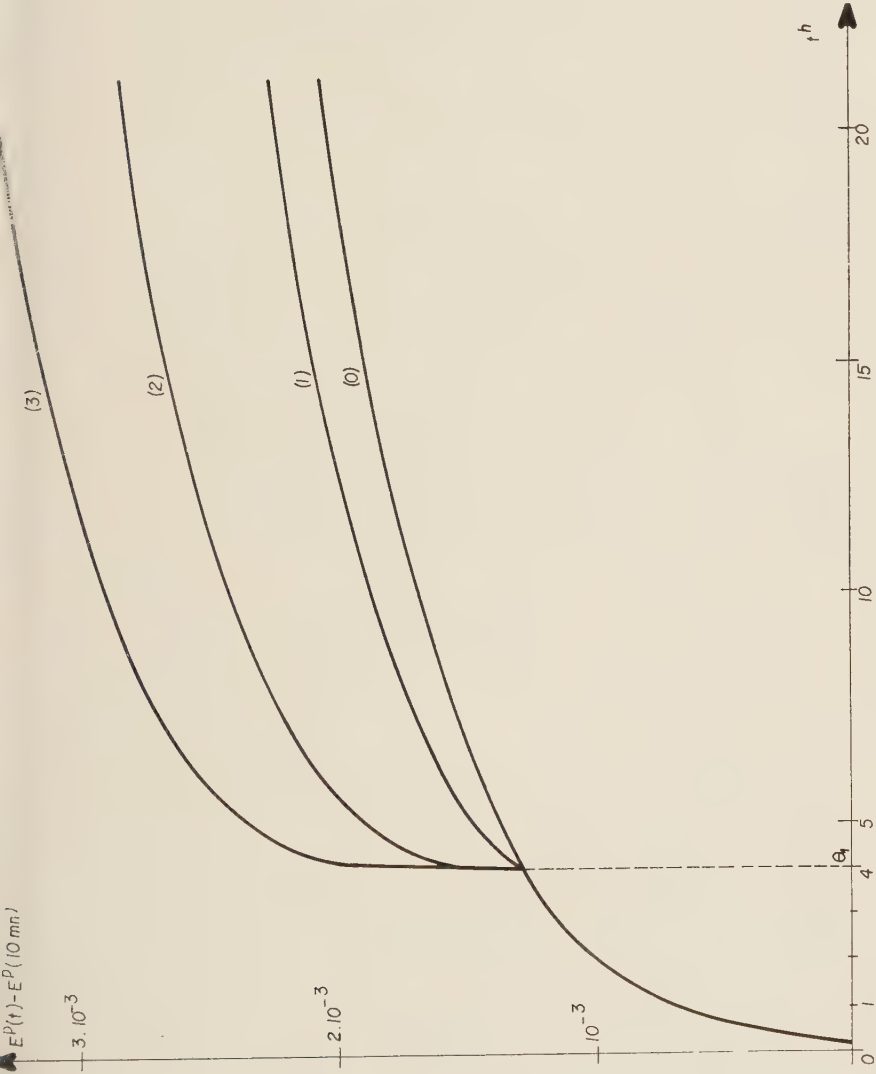


FIG. 19. — Influence de l'amplitude $\hat{\Sigma}_1$ de la contrainte alternative :

$\Sigma_0 = 9,55 \text{ kg/mm}^2, \quad \nu = 30 \text{ Hz}, \quad \theta_1 = 4 \text{ h},$

$\Sigma_1 \left[\begin{array}{l} (0) : 0 \quad (\text{fluage statique}) \\ (1) : 0,06 \text{ kg/mm}^2 \\ (2) : 0,22 \text{ kg/mm}^2 \\ (3) : 0,35 \text{ kg/mm}^2 \end{array} \right.$

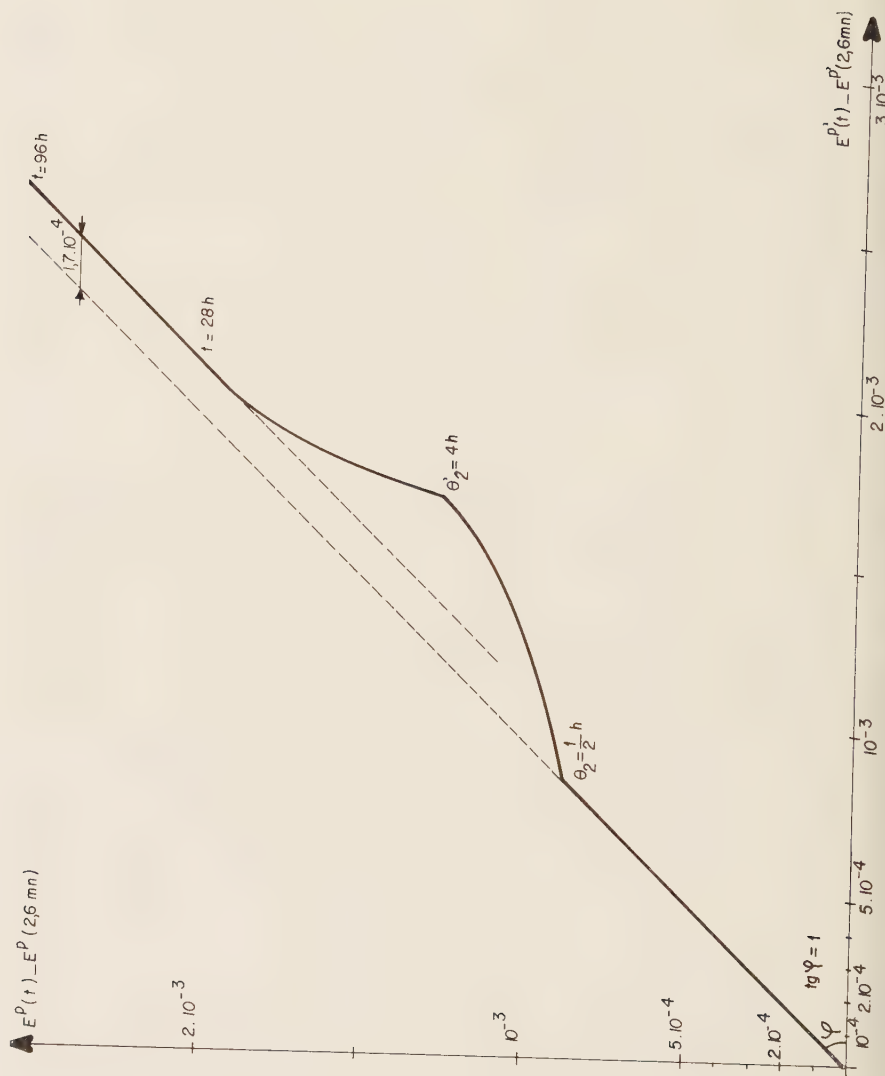


FIG. 20. — Influence du temps θ_2 de maintien sous vibrations (à mêmes Σ_1 et ω_1) :

$$\Sigma_0 = 9,55 \text{ kg/mm}^2$$

$$\hat{\Sigma}_1 = \hat{\Sigma}_1' = 0,22 \text{ kg/mm}^2 = -\hat{\Sigma}_2 = -\hat{\Sigma}_2'$$

$$\nu_1 = \nu_1' = 30 \text{ Hz}$$

$$\theta_1 = \theta_1' = 0$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \text{ h}$$

$$\theta_2' = 4 \text{ h}$$

δ. Remarques.

On a pu identifier les essais ($\Sigma_0 \rightarrow \Sigma_0 + \tilde{\Sigma}_1, \theta_1$) aux essais ($\Sigma_0 + \tilde{\Sigma}'_1 \rightarrow \Sigma_0 + \tilde{\Sigma}'_1 + \tilde{\Sigma}_1, \theta_1$), ceci étant sûrement favorisé par la faible valeur de $\tilde{\Sigma}_1/\Sigma_0$, qui rend les contraintes de départ Σ_0 et $\Sigma_0 + \tilde{\Sigma}'_1$ à peu près identiques.

● Une variation de fréquence en cours de fluage sans variation d'amplitude n'a aucun effet sur la courbe de fluage (tout au moins dans la gamme de fréquences étudiée).

● Enfin, si l'on compose sur un oscilloscope (position « X -- Y ») des indications proportionnelles à la partie alternative de la déformation et à la partie alternative de la contrainte au cours d'un essai de fluage, la « courbe de LISSAUX » ainsi obtenue se réduit à un segment de droite, sans aucune discontinuité (sauf peut-être pour les tout premiers cycles où l'observation est difficile à réaliser expérimentalement). De plus le rapport de linéarité que l'on peut ainsi mesurer est strictement égal au module d'élasticité du matériau (module Young, soit 10 600 kg/mm²). Ceci signifie que, au moins dans la gamme de contraintes explorée, il n'y a pas de déformation plastique instantanée, de sorte que le comportement instantané n'est pas différent dans les demi-périodes de charge et de décharge. Par suite on ne peut expliquer les propriétés observées plus haut dans le cas du fluage sous vibrations que dans le cadre de la viscoplasticité.

B. ÉTUDE DE L'INFLUENCE

DE SURCHARGES ET DE DÉCHARGES PARTIELLES EN COURS DE FLUAGE

a. Dispositif expérimental.

Il a été décrit dans [18]. Signalons les principales différences avec le montage précédent :

— éprouvette verticale et traction exercée par poids amovibles, l'équipage étant guidé sans frottement pour ses translations verticales;

— régulation thermique améliorée par l'introduction d'une source froide, la diminution du volume d'air régulé (moins d'un litre) et l'utilisation d'un thermocouple. La température imposée est toujours de 26 °C.

b. Résultats expérimentaux.

a. Surcharge en cours de fluage.

L'imposition d'une surcharge à l'instant θ se traduit par une brusque variation de la vitesse de déformation (comme dans le cas d'une mise en vibrations); propriété de similitude se retrouve également : pour de faibles charges on a :

$$E^p(t, \Sigma_1 + \Delta\Sigma, \theta) - E^p(t, \Sigma_1, \theta) = \Delta E^p\left(\Sigma_1, \Delta\Sigma, \frac{t-\theta}{\theta}\right)$$

c'est-à-dire que ΔE^p ne dépend, à Σ_1 et $\Delta\Sigma$ fixés, que de $\left(\frac{t}{\theta}\right)$ [alors que, pour un matériau viscoélastique linéaire, ΔE^p ne dépend que de $(t - \theta)$].

b. *Décharge partielle en cours de fluage* : on impose une contrainte de traction constante Σ_1 , puis à l'instant θ , une décharge partielle d'amplitude $\Sigma_1 - \Sigma_2 = \Delta\Sigma$. Dans tous les essais, Σ_2 a été maintenu constant et égal à $9,55 \text{ kg/mm}^2$. On étudie l'influence des paramètres Σ_1 et θ .

α . θ constant.

α_1 . $\theta = 2 \text{ h}$; la figure 21 indique l'allure générale des différentes courbes $E^p(t)$ pour différents Σ_1 et leurs positions relatives. La figure 22 montre, à une échelle plus grande, la partie des courbes postérieure à l'instant θ de la décharge, les courbes étant toutes rapportées à la même origine : il s'agit donc de la variation de $E^p(t) - E^p(\theta_+)$ en fonction de $(t - \theta)$ pour les différents Σ_1 .

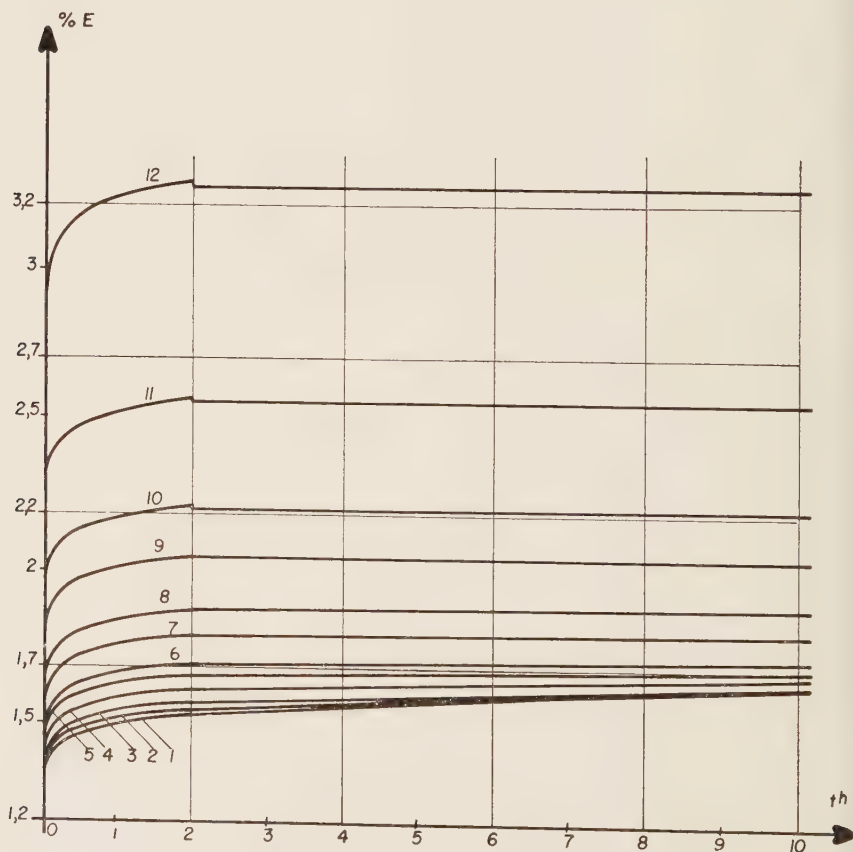


FIG. 21. — Résultats expérimentaux (décharges partielles) $\Sigma_2 = 9,55 \text{ kg/mm}^2$; $\theta = 2 \text{ h}$:

- | | | |
|---------------------------------------|--|---|
| (1) $\Sigma_1 = 9,55 \text{ kg/mm}^2$ | (5) $\Sigma_1 = 9,75 \text{ kg/mm}^2$ | (9) $\Sigma_1 = 10,32 \text{ kg/mm}^2$ |
| (2) $\Sigma_1 = 9,58 \text{ kg/mm}^2$ | (6) $\Sigma_1 = 9,81 \text{ kg/mm}^2$ | (10) $\Sigma_1 = 10,57 \text{ kg/mm}^2$ |
| (3) $\Sigma_1 = 9,62 \text{ kg/mm}^2$ | (7) $\Sigma_1 = 9,94 \text{ kg/mm}^2$ | (11) $\Sigma_1 = 11,08 \text{ kg/mm}^2$ |
| (4) $\Sigma_1 = 9,69 \text{ kg/mm}^2$ | (8) $\Sigma_1 = 10,06 \text{ kg/mm}^2$ | (12) $\Sigma_1 = 12,10 \text{ kg/mm}^2$ |

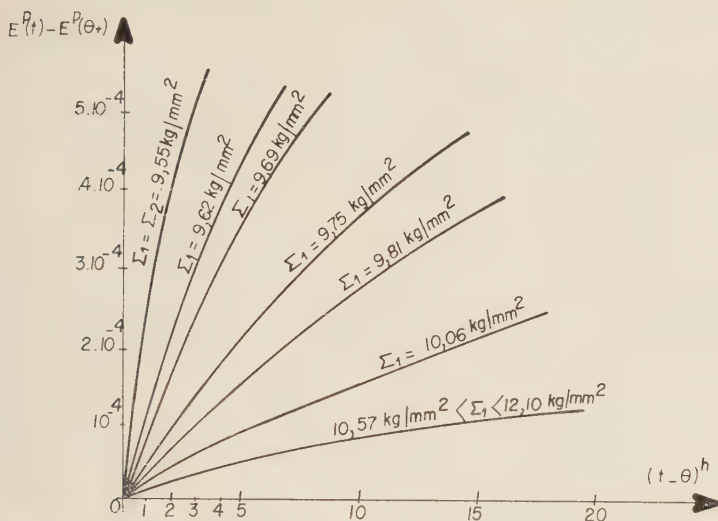


FIG. 22. — Comparaison des courbes de fluage après décharge partielle (Σ_1 variable)

On remarque que :

- quel que soit $\Sigma_1 > \Sigma_2$ les courbes se situent *au-dessous* de la courbe de référence ($\Sigma_1 = \Sigma_2$). Elles s'en écartent d'autant plus que Σ_1 est plus grand.
- pour Σ_1 assez grand ($\Sigma_1 \geq \Sigma_l = 10,6 \text{ kg/mm}^2$) toutes les courbes sont confondues : il existe donc une courbe limite $E^v(t - \theta)$;
- à l'intérieur du domaine défini par ces deux courbes limites, les différentes courbes ne se recoupent jamais, et on peut remarquer, dans une zone intermédiaire, l'existence d'un point d'inflexion sur les courbes de fluage.

On a alors soustrait des indications de ces courbes la déformation donnée par la courbe limite inférieure $E^v(t - \theta)$, en pensant éliminer ainsi la partie « viscoélastique » de la déformation pour isoler le comportement purement viscoplastique. La figure 23 représente $E^p(t) - E^p(\theta_+) - E^v(t - \theta)$ en fonction de $(t - \theta)$; elle permet des conclusions beaucoup plus précises :

- pour Σ_1 voisin de Σ_2 (décharges de faible amplitude), les courbes sont, dès le début, à concavité négative (domaine A) : elles ne se différencient pas, par leur forme, de la courbe à Σ_2 constant. Nous disons qu'il n'y a pas d'hésitation;
- pour des Σ_1 plus élevés, la déformation commence à *vitesse constante* puis s'accélère rapidement pour retrouver bientôt une vitesse décroissante (domaine B). C'est l'instant, facile à apprécier, du décollement de la courbe de la droite de départ, que nous choisirons pour définir la « reprise » — c'est-à-dire la fin du « temps d'hésitation » T_H ;
- enfin pour Σ_1 proche de Σ_l , il est possible qu'existe un troisième domaine (C) pour lequel le temps d'hésitation est infini pour toute une gamme de contraintes, la vitesse de déformation non « viscoélastique » n'étant pas nulle.

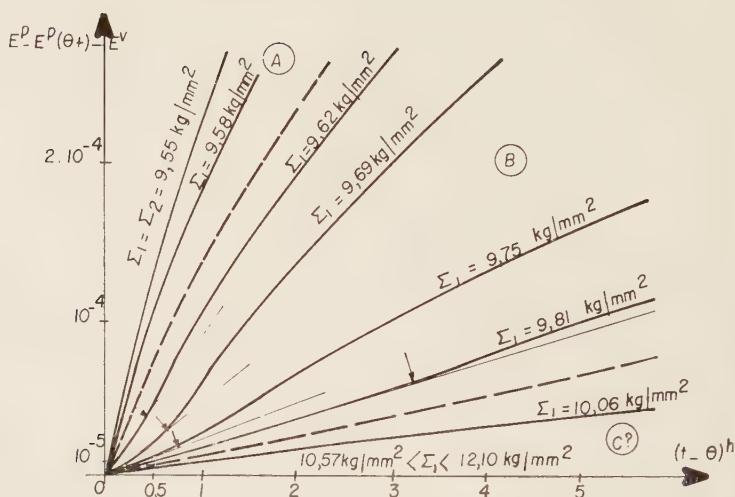


FIG. 23. — Hésitation au fluage = mise en évidence des domaines A, B et C

L'existence d'un tel domaine, si elle est suggérée par la variation de T_H en fonction de Σ_1 (figure 24), ne peut cependant être affirmée avec certitude, la durée des essais ayant été limitée à une vingtaine d'heures. On a seulement observé que, dans les limites du temps d'expérience, la reprise était imperceptible.

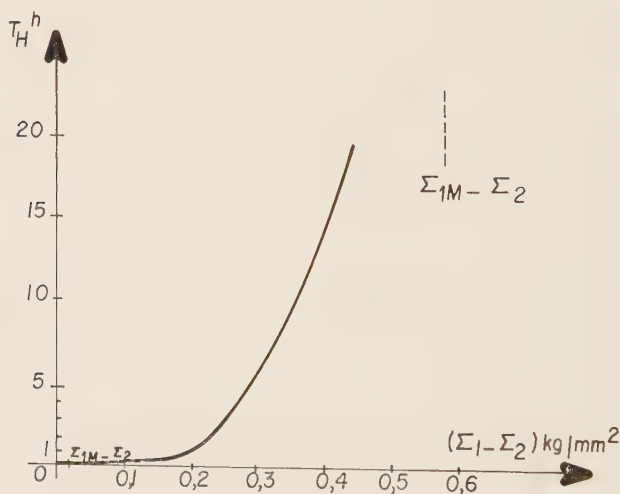


FIG. 24. — Influence de Σ_1 sur le temps T_H :

$$\theta = 2 \text{ h}$$

$$\Sigma_2 = 9,55 \text{ kg/mm}^2$$

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 \neq 1 \text{ kg/mm}^2$$

α_2 . $\theta = 1/2$ h : une série d'essais analogues pour $\theta = 1/2$ heure n'a pas permis d'aboutir à des résultats aussi nets; on n'a en effet pas trouvé dans ces essais, une vitesse constante pour la déformation décalquée de la partie « visco-élastique » avant l'instant de la reprise — circonstance qui avait facilité l'essai précédente, mais qui semble ne se produire que pour des temps θ élevés ($\theta \geq 1$ h 1/2), comme une propriété asymptotique.

Σ_1 constant.

On a conduit une seule série d'essais pour $\Sigma_1 = 9,62$ kg/mm² et pour différents θ . Le temps d'hésitation T_H a été évalué par la méthode précédente. La figure 25 rassemble les différents résultats en donnant la variation de T_H

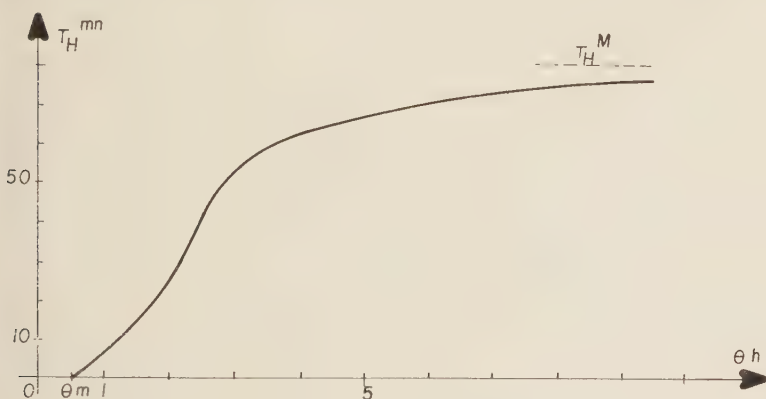


Fig. 25. — Influence de θ sur le temps T_H :

$$\Sigma_1 = 9,62 \text{ kg/mm}^2$$

$$\Sigma_2 = 9,55 \text{ kg/mm}^2$$

en fonction de θ — pour Σ_1 et Σ_2 fixés (avec Σ_1 très peu supérieur à Σ_2). On constate alors qu'il existe une valeur θ_m de θ au-dessous de laquelle il n'y a pas d'hésitation ($T_H = 0$). Puis T_H croît très vite pour tendre vraisemblablement vers une limite finie T_H^M quand θ augmente indéfiniment.

Il est clair d'autre part que la propriété de similitude observée en surcharge E^p en fonction de t/θ à Σ_1 fixé n'existe plus à la décharge : cette propriété est en effet annulée par la présence de l'hésitation.

C. COMPARAISON DES DEUX SÉRIES DE RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX (diagramme de charge sinusoïdal ou en créneau)

On constate que :

— la réponse à une surcharge est tout à fait analogue à celle à une mise en vibration;

— l'analogie est moins nette si l'on compare les essais de décharge partielle et d'arrêt des vibrations.

Cela se traduit par le fait qu'on peut trouver une correspondance quantitative très satisfaisante dans le premier cas, mais pas dans le second.

1. Mise en vibrations/surcharge.

Connaissant la réponse à une mise en vibrations ($\Sigma_0 = 9,55 \text{ kg/mm}^2$ — $\tilde{\Sigma}_1 = 0,06 \text{ kg/mm}^2$; $0,22 \text{ kg/mm}^2$; $0,35 \text{ kg/mm}^2$) au bout de 4 heures on observe la réponse à une surcharge partielle (de $0,06 \text{ kg/mm}^2$; $0,22 \text{ kg/mm}^2$; $0,35 \text{ kg/mm}^2$ à partir d'une charge initiale Σ_1 de $9,55 \text{ kg/mm}^2$) au bout du même temps. C'est-à-dire qu'on a comparé des courbes correspondant, toutes choses égales d'ailleurs, à des amplitudes de surcharge et de vibrations égales.

On a observé que :

— la vitesse de déformation pour une expérience de surcharge est toujours plus élevée que celle pour l'expérience correspondante de mise en vibrations

— il est possible de trouver une surcharge *équivalente* à une amplitude de vibrations, telle que les courbes obtenues en réponse soient *identiques* — sauf pour les tout premiers instants. Par exemple, une surcharge de $0,185 \text{ kg/mm}^2$ est équivalente — sauf au tout début — à des vibrations d'amplitude $0,22 \text{ kg/mm}^2$ pour $\theta = 4$ heures;

— cette surcharge équivalente ainsi déterminée ne dépend pas de l'instants θ où elle est imposée : ainsi pour $\theta = 1 \text{ h}$, la surcharge équivalente à des vibrations d'amplitude $0,22 \text{ kg/mm}^2$ est toujours de $0,185 \text{ kg/mm}^2$. Cette observation est en accord avec les constatations précédentes : dans les deux cas de charge, $\Delta E^p(t - \theta, \theta)$ ne dépend que du paramètre t/θ , pour des amplitudes de contrainte fixées;

— le rapport entre surcharge équivalente et amplitude des vibrations correspondante dépend très légèrement de l'amplitude des vibrations; il est par exemple de 0,85 pour $0,22 \text{ kg/mm}^2$ et de l'ordre de 0,95 pour $0,06 \text{ kg/mm}^2$ il est fonction décroissante de l'amplitude des vibrations. Ceci a pour effet de rabaisser le module plastique équivalent ($\frac{1}{3}A - b - \beta$) à une valeur plus vraisemblable.

2. Arrêt des vibrations/décharge.

La concordance quantitative fait par contre défaut dans ce cas. On peut en déduire que la propriété d'hésitation au fluage est très sensible à l'histoire de charge antérieure à la décharge — ou à l'arrêt des vibrations — contrairement à ce qui se passe en réponse à une surcharge ou à une mise en vibrations.

3. Comportement sous vibrations.

Lorsqu'on superpose des vibrations à une contrainte constante, chaque cycle de vibration correspond à une période de surcharge puis de décharge partielle. Si l'amplitude des vibrations est suffisante on peut penser que, a

ins au bout d'un certain temps, chaque période de décharge partielle entraîne la propriété d'hésitation, ou même l'arrêt total du fluage; de la sorte une mise en vibrations aurait pour conséquence de multiplier les effets de l'hésitation au fluage. Dans cette optique, on a comparé les deux essais suivants :

— essai (1) : on impose la contrainte $\Sigma_0 = 9,55 \text{ kg/mm}^2$, jusqu'au temps $t = 4 \text{ h}$; à l'instant θ on superpose à Σ_0 une vibration d'amplitude $\tilde{\Sigma}_1 = 0,35 \text{ kg/mm}^2$ ce qui, pour nos essais, est une amplitude relativement forte;

— essai (2) : on impose la contrainte $\Sigma_0 = 9,55 \text{ kg/mm}^2$ pendant le même temps $\theta = 4 \text{ h}$, puis on ajoute la surcharge $\Delta\Sigma$ d'amplitude $0,35 \text{ kg/mm}^2$.

On compare alors la déformation E_2^p du deuxième essai à l'instant $t > \theta$ et la déformation E_1^p du premier essai à l'instant $\theta + 2(t - \theta)$ soit $2t - \theta$. On trouve alors que $E_2^p(t) \neq E_1^p(2t - \theta)$ quel que soit $t > \theta$.

Ceci est conforme aux remarques précédentes. En effet on peut admettre que dans le premier essai, chaque demi-période de charge est équivalente à un essai sous contrainte maximum $\Sigma_0 + \tilde{\Sigma}_1 = \Sigma_0 + \Delta\Sigma$, tandis que chaque demi-période de décharge correspond à un blocage total de la déformation statique. De la sorte on doit s'attendre à ce que la courbe (1) se réduise à la courbe (2) si l'on opère sur elle une contraction des temps de rapport $1/2$. C'est bien ce qui est exprimé par la propriété observée : $E_2^p(t) \neq E_1^p(2t - \theta)$. On peut remarquer que cette propriété n'est pas contradictoire, du moins en première approximation, avec celle de similitude. Désignons en effet par E_s^p et E_s^r les déformations de fluage, pour $t > \theta$, pour un essai statique, sur l'essai (1) et pour l'essai (2) respectivement. D'après les propriétés de similitude énoncées plus haut, on doit avoir :

$$(1.4) \quad \begin{cases} E_1^p(t) = E_s^p(t) + F_1\left(\frac{t}{\theta}\right) \\ E_2^p(t) = E_s^r(t) + F_2\left(\frac{t}{\theta}\right) \end{cases}$$

On doit avoir de plus, d'après la propriété signalée plus haut :

$$(1.5) \quad E_2^p(t) = E_1^p(2t - \theta)$$

Cela entraîne que :

$$(1.6) \quad E_s^r(2t - \theta) - E_s^p(t) = F_1\left(\frac{t}{\theta}\right) - F_2\left(\frac{2t}{\theta} - 1\right) = F_s\left(\frac{t}{\theta}\right)$$

Or, comme nous l'avons vu, E_s^p est de la forme :

$$E_s^p = a + bt^n$$

avec n très petit ($n \neq 0,05$). Pour t assez grand, E_s^p peut donc se mettre sous la forme :

$$E_s^p \neq c + d \text{ Log } t \text{ avec } d \neq bn$$

comme on peut le vérifier sur les dérivées par rapport au temps.

Par conséquent on a :

$$(III.7) \quad E'_s(2t - \theta) - E'_s(t) \neq d \cdot \text{Log} \left(2 - \frac{\theta}{t} \right)$$

soit une fonction de (t/θ) seulement, comme prévu par la formule (III.6)

D. AJUSTEMENT DU MODÈLE PROPOSÉ AUX RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

On voit donc que le modèle proposé au chapitre II, et particulièrement celui qui repose sur la loi d'interaction modifiée rend qualitativement compte des principaux résultats expérimentaux :

— augmentation de la vitesse de fluage sous vibrations;

— propriété d'hésitation (même si la définition de T_H n'est pas rigoureusement la même pour le modèle et dans l'expérience). Pour rechercher un accord quantitatif, il faut d'abord déterminer la fonction f .

Sans aller jusqu'au bout du calcul, nous montrerons comment on peut lever l'arbitraire que comporte le choix de la fonction $f(\Sigma, E^p, \tau_0, Y^*)$ en utilisant certains résultats expérimentaux. Successivement nous déterminerons la fonction

f pour $Y^* = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ par les essais de fluage; nous montrerons ensuite que la

fonction f ainsi déterminée permet de retrouver d'autres propriétés expérimentales — comme celle de similitude pour une surcharge en cours de fluage — nous entamerons enfin le calcul de la réponse à une décharge partielle (hésitation). Précisons déjà que, de toute façon, la correspondance ne pourra se faire que dans une gamme assez restreinte de contraintes puisque le modèle proposé est, par construction, linéaire, alors que les propriétés viscoplastiques du cuivre ne le sont pas. Dans la mesure où les essais expérimentaux se font précisément, dans une faible marge en contraintes (vibrations, surcharge ou décharge de faible amplitude, contrainte constante, etc.) ceci n'est pas un inconvénient majeur. Il est clair cependant que le modèle ne peut représenter au maximum qu'un comportement « tangent » au comportement réel, et que l'écart en est d'autant plus grand que la gamme des contraintes s'élargit.

1. Détermination de la fonction f pour Σ constant et $Y^* = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ (écoulement de tous les grains).

La loi de fluage déterminée expérimentalement peut s'écrire :

$$(III.8) \quad E^p(t) = A + B t^{1/m}$$

avec $m \gg 1$ (dans nos expériences, $m \approx 20$).

On peut retrouver cette loi de fluage par un choix convenable de la fonction f . Il suffit de choisir $f = 1$ dans un court intervalle de temps ($0 < t < t_0$) puis

adopter une fonction décroissante de E^p . Plus précisément on prendra (26) :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_0 = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{\eta}{\mu (1-\beta) (1-3 < \alpha_{33}^2 >)} \\ E_0^p = \frac{< \alpha_{33}^2 > \Sigma - < \alpha_{33} > \tau_0}{\mu (1-\beta) (1-3 < \alpha_{33}^2 >)} \left[1 - e^{-\frac{m-1}{m}} \right] \end{array} \right.$$

$= 1$ pour $t \leq t_0$, $E^p \leq E_0^p$.

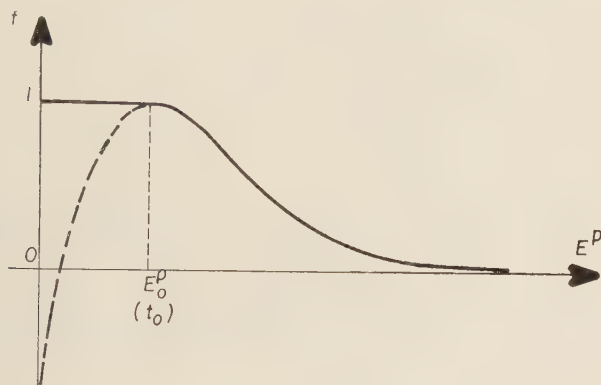


FIG. 26. — Variation de f avec E^p à Σ constant $\left(> \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0 \right)$

Pour $t > t_0$, on aura :

$$(10) \quad f = \frac{< \alpha_{33}^2 > \Sigma - < \alpha_{33} > \tau_0}{\mu (1-\beta) (1-3 < \alpha_{33}^2 >)} E^p \left\{ 1 - a \left[\frac{(m-1) a}{ma - 1 + \frac{\mu (1-\beta) (1-3 < \alpha_{33}^2 >)}{< \alpha_{33}^2 > \Sigma - < \alpha_{33} > \tau_0} E^p} \right]^{m-1} \right\}$$

:

$$e^{-\frac{m-1}{m}}.$$

De la sorte, pour $t > t_0$, l'équation de fluage :

$$\eta \dot{E}^p + \mu (1-\beta) (1-3 < \alpha_{33}^2 >) f \cdot E^p = < \alpha_{23}^2 > \Sigma - < \alpha_{33} > \tau_0$$

se résoud par :

$$(11) \quad E^p = \frac{< \alpha_{33}^2 > \Sigma - < \alpha_{33} > \tau_0}{\mu (1-\beta) (1-3 < \alpha_{33}^2 >)} \left[(m-1) a \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{m}} + 1 - ma \right]$$

Pour $t < t_0$, E^p s'écrit, comme dans le cas du modèle « S.K.B. » :

$$(III.12) \quad E^p = \frac{<\alpha_{33}^2>\Sigma - <\alpha_{33}>\tau_0}{\mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{33}^2>)} \left[1 - e^{-\frac{\mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{33}^2>)}{\eta} t} \right]$$

Pour $t = t_0$, il y a continuité de E^p , $\dot{E}^p$, f , $\frac{\partial f}{\partial E^p}$ et f . On peut remarquer que pour des essais de fluage sous différentes contraintes Σ , la variation de f en fonction du temps t est la même : en effet t_0 est indépendant de Σ et E est proportionnel à $(<\alpha_{33}^2>\Sigma - <\alpha_{33}>\tau_0)$. On obtient :

$$(III.13) \quad \begin{cases} \text{pour } t \leq t_0 : f = 1 \\ \text{pour } t \geq t_0 : f = \frac{1 - a\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{m}-1}}{(m-1)a\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{m}} + 1 - ma} \end{cases}$$

On verra dans les applications pratiques que l'on est conduit à donner à η une valeur très faible, ce qui entraîne pour t_0 une valeur de quelques fractions de seconde : on peut donc considérer pratiquement que le fluage obtenu est « parabolique » depuis la mise en charge.

REMARQUE. — Pour $m = 3$, on obtient le fluage classique d'ANDRADE. On pourrait également retrouver sans difficulté, pour une fonction f adéquate, un fluage logarithmique.

2. Influence d'une surcharge de faible amplitude en cours de fluage.

Imposons la surcharge $\Delta\Sigma$ à l'instant $\theta > t_0$. Pour $t > \theta$, E^p vérifie l'équation :

$$\begin{aligned} \eta \dot{E}^p + \mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{33}^2>)f\left(\Sigma + \Delta\Sigma, E^p, \tau_0, \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)E^p \\ = <\alpha_{33}^2>(\Sigma + \Delta\Sigma) - <\alpha_{33}>\tau_0 \end{aligned}$$

où f est donnée par la formule (III. 10) où l'on remplace Σ par $(\Sigma + \Delta\Sigma)$. En exprimant de plus que :

$$E^p(\theta) = \frac{<\alpha_{33}^2>\Sigma - <\alpha_{33}>\tau_0}{\mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{33}^2>)} \left[(m-1)a\left(\frac{\theta}{t_0}\right)^{\frac{1}{m}} + 1 - ma \right]$$

on obtient pour $t > \theta$:

$$\mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{33}^2>)E^p(t)$$

$$\begin{aligned} = & \left[<\alpha_{33}^2>\Delta\Sigma(ma-1) + (m-1)a(<\alpha_{33}^2>\Sigma - <\alpha_{33}>\tau_0)\left(\frac{\theta}{t_0}\right)^{\frac{1}{m}} \right]^m \\ & + [(m-1)a(<\alpha_{33}^2>(\Sigma + \Delta\Sigma) - <\alpha_{33}>\tau_0)]^m \times \frac{t-\theta}{t_0} \left\{ \frac{1}{m} \right. \\ & \left. + (1-ma)[<\alpha_{33}^2>(\Sigma + \Delta\Sigma) - <\alpha_{33}>\tau_0] \right\} \end{aligned}$$

Désignons par $E_{cr}^p(t)$ la valeur de la déformation plastique extrapolée, c'est-à-dire celle que l'on aurait observée à l'instant t si l'on n'avait pas imposé surcharge. On a d'après (III, 11) :

$$E_{cr}^p(t) = \frac{<\alpha_{33}^2>\Sigma - <\alpha_{33}>\tau_0}{\mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{33}^2>)} \left[(m-1) a \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{m}} + 1 - ma \right]$$

Posons $\Delta E^p(t, \theta) = E^p(t) - E_{cr}^p(t)$; on trouve :

$$(14) \quad \mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{33}^2>) \Delta E^p(t, \theta) \\ \left\{ \left[<\alpha_{33}^2>\Delta\Sigma(ma-1) + (m-1)a(<\alpha_{33}^2>\Sigma - <\alpha_{33}>\tau_0) \left(\frac{\theta}{t_0} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^m \right. \\ \left. - [(m-1)a(<\alpha_{33}^2>(\Sigma + \Delta\Sigma) - <\alpha_{33}>\tau_0)]^m \cdot \frac{t-\theta}{t_0} \right\}^{\frac{1}{m}} \\ - (m-1)a(<\alpha_{33}^2>\Sigma - <\alpha_{33}>\tau_0) \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{m}} - <\alpha_{33}^2>\Delta\Sigma(ma-1)$$

Si l'on considère $\Delta\Sigma$ comme infiniment petit principal et si l'on développe l'expression suivant les puissances de $\Delta\Sigma$ en se limitant au premier ordre, on trouve :

$$(15) \quad \Delta E^p(t, \theta) \approx \frac{<\alpha_{33}^2>\Delta\Sigma}{\mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{33}^2>)} \left\{ (ma-1) \left[\left(\frac{t}{\theta} \right)^{\frac{1-m}{m}} - 1 \right] \right. \\ \left. + (m-1)a \cdot \frac{t-\theta}{t_0} \cdot \left(\frac{t_0}{t} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right\}$$

Le plus étant donné la très faible valeur de $\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} \neq 0,05 \right)$ on peut, dans le second terme de la quantité entre accolades de la formule (III.15), remplacer $1 - \frac{1}{m}$ par $\lambda(\theta) \times \frac{t_0}{t} \times \left(\frac{t}{\theta} \right)^{\frac{1}{m}}$ où $\lambda(\theta) = (\theta/t_0)^{1/m}$ est pratiquement constant sur la gamme de θ explorée expérimentalement (quand θ varie de 0.5 h. à 1 h., $\lambda(\theta)$ est seulement multiplié par 1,15). Prenons donc $\lambda(\theta) = \lambda_0$. Il vient :

$$(16) \quad \Delta E^p(t, \theta) \approx \frac{<\alpha_{33}^2>\Delta\Sigma}{\mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{33}^2>)} \left\{ (ma-1) \left[\left(\frac{t}{\theta} \right)^{\frac{1-m}{m}} - 1 \right] \right. \\ \left. + (m-1)\lambda_0 \cdot a \cdot \frac{t-\theta}{t} \cdot \left(\frac{t}{\theta} \right)^{\frac{1}{m}} \right\}$$

Ceci signifie que $\Delta E^p(t, \theta)$ ne dépend en fait pratiquement, pour de faibles valeurs de $\Delta\Sigma$, que de (t/θ) . C'est bien le résultat obtenu expérimentalement (voir le chapitre, § III.B.2.a).

On peut le voir plus précisément sur une application numérique sans approximation. Si l'on porte $\Delta E^p(t, 2\theta)$ en fonction de $\Delta E^p(t, \theta)$ pour un même (t/θ) avec $\Sigma = 9,55 \text{ kg/mm}^2$, $\Delta\Sigma = 0,25 \text{ kg/mm}^2$, $\eta = 10^{-5} \text{ h} \times \text{kg/mm}^2$, $\mu = 4\,000 \text{ kg/mm}^2$, $\beta = 1/2$, $\theta = 1 \text{ heure}$ et $m = 20$, on trouve une droite de pente très voisine de 1 (soit 1,05) en appliquant la formule (III.14) pour $(t/\theta-1)$ variant de 10^{-3} à $2^{12} \times 10^{-3}$ (cf. fig. 27) : ceci est en bon accord avec les résultats d'expérience.

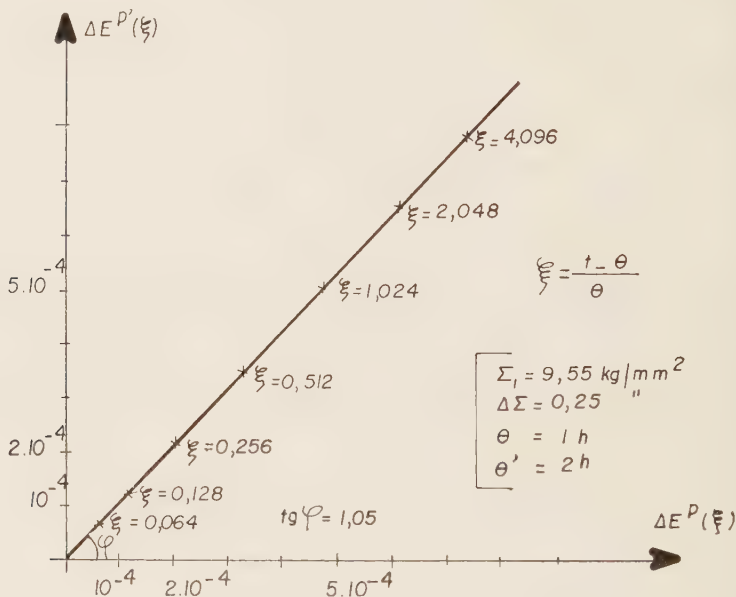


FIG. 27. — Propriété de similitude (modèle)

3. Influence d'une décharge partielle en cours de fluage (méthode de calcul)

Pour calculer la réponse du modèle à une décharge partielle en cours de fluage il faut d'une part connaître complètement l'état d'écoulement dans tous les grains à l'instant de la décharge partielle, d'autre part connaître la loi de variation de la fonction $f(\Sigma_2, E^p, \tau_0, Y^*)$ en fonction de Y^* .

Nous nous contenterons de résoudre le premier problème et de préciser les conditions de croissance que doit remplir la fonction f sans choisir une loi de variation particulière de f en fonction de Y^* — étant donné, d'une part, la complexité du calcul, d'autre part, l'arbitraire que cela comporte vu la difficulté de donner un sens physique aux différents paramètres qui entrent en jeu dans cette variation. Nous montrerons seulement qu'il est possible de choisir une fonction f qui soit égale à la fonction déterminée plus haut dans le cas où tous les grains sont en écoulement, et qui rende compte de toutes les propriétés d'hésitation observées expérimentalement.

a. Détermination de $H(\theta)$, $Y^*(\theta)$ et de $Y^*(t)$ et $E^p(t)$ pour $t > \theta$.

En adoptant les mêmes notations qu'au chapitre II, l'état d'écoulement dans les différents grains à l'instant θ est déterminé par la fonction $H(t)$. En effet $G(t)$ est défini par :

$$G(t) = \frac{E^p(t) - \langle \alpha_{33}^2 \rangle H(t)}{\langle \alpha_{33}^2 \rangle}$$

qui permet de calculer le glissement γ dans tous les grains ainsi que $\dot{\gamma}$:

$$\begin{cases} \gamma = \alpha_{33} G(t) + H(t) \\ \dot{\gamma} = \alpha_{33} \dot{G}(t) + \dot{H}(t) = \frac{\alpha_{33}}{\eta} [\Sigma_1 + 3\mu(1-\beta)f_1 \cdot E^p] - \frac{\tau_0}{\eta} - \frac{\mu}{\eta} (1-\beta)f_1 \gamma \end{cases}$$

$\dot{H}(t)$ vérifie l'équation :

$$\eta \dot{H} + \mu(1-\beta)f_1 \cdot H = -\tau_0$$

avec $H(0) = 0$. Puisque l'on connaît l'expression de f_1 en fonction de t , on peut écrire (pour $t > t_0$) :

$$\text{III.17) } \eta \dot{H} + \mu(1-\beta) \frac{1-a \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/m-1}}{(m-1)a \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/m} + 1-ma} H = -\tau_0$$

dont la solution s'écrit, pour $t > t_0$:

$$\text{III.18) } H(t) = e^{-F(t)} \left[H(t_0) - \frac{\tau_0}{\eta} \int_{t_0}^t e^{F(u)} du \right]$$

où :

$$F(t) = \int_{t_0}^t \frac{\mu(1-\beta)}{\eta} \cdot \frac{1-a \left(\frac{x}{t_0}\right)^{1/m-1}}{(m-1)a \left(\frac{x}{t_0}\right)^{1/m} + 1-ma} dx$$

et :

$$H(t_0) = -\frac{\tau_0}{\mu(1-\beta)} \left[1 - e^{-\frac{m-1}{m(1-3\langle \alpha_{33}^2 \rangle)}} \right]$$

On peut calculer directement $F(t)$ numériquement pour avoir $H(t)$ par (III.18). On peut aussi bien résoudre l'équation (III.17) par une méthode numérique, comme celle de RUNGE-KUTTA. C'est ce que l'on a fait pour obtenir $H(t)$ (figure 28).

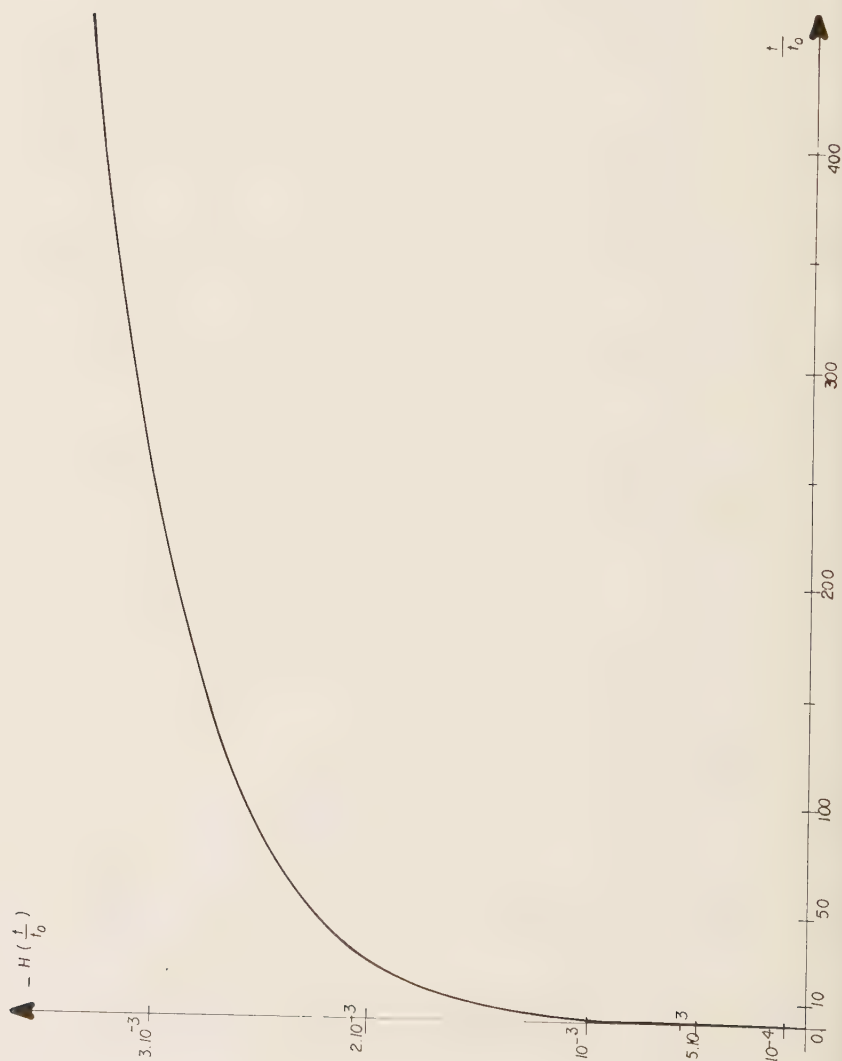


FIG. 28. — — $H\left(\frac{t}{t_0}\right)$ (modèle) :

$$\tau = 2,15 \text{ kg/mm}^2$$

$$\mu = 4\,000 \quad //$$

On peut remarquer cependant que, pour t/t_0 suffisamment grand (supérieur à quelques dizaines), $H(t)$ peut se réduire à :

$$\text{III.19)} \quad H(t) \approx - \frac{\tau_0 (1 - 3 < \alpha_{33}^2 >)}{< \alpha_{33}^2 > \Sigma_1 - < \alpha_{33} > \tau_0} E^p(t) \\ = - \frac{\tau_0}{\mu (1 - \beta)} \left[(m-1) a \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/m} + 1 - ma \right]$$

et donc $G(t)$ à :

$$\text{III.20)} \quad G(t) \approx \frac{\Sigma_1 - 3 < \alpha_{33} > \tau_0}{< \alpha_{33}^2 > \Sigma_1 - < \alpha_{33} > \tau_0} E^p \\ = \frac{\Sigma_1 - 3 < \alpha_{33} > \tau_0}{\mu (1 - \beta) (1 - 3 < \alpha_{33}^2 >)} \left[(m-1) a \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/m} + 1 - ma \right]$$

Posons $\xi(\theta) = (m-1) a \left(\frac{\theta}{t_0} \right)^{1/m} + 1 - ma$. La formule (II.27) qui donne

l'expression de Y^* devient :

$$\text{III.21)} \quad Y^* = \frac{\Sigma_2 - f_2 \Sigma_1 \xi(\theta) + 3 \mu (1 - \beta) f_2 [E^p - E^p(\theta)]}{\tau_0 [1 - f_2 \xi(\theta)]} \\ = \frac{\Sigma_1}{\tau_0} - \frac{\Delta \Sigma - 3 \mu (1 - \beta) f_2 [E^p - E^p(\theta)]}{\tau_0 [1 - f_2 \xi(\theta)]}$$

d'où :

$$\text{III.22)} \quad Y^*(\theta) = \frac{\Sigma_2 - f_2(\theta) \Sigma_1 \xi(\theta)}{\tau_0 [1 - f_2(\theta) \xi(\theta)]}$$

Dans ces formules, f_2 est aussi fonction de Y^* : ce sont donc des équations implicites. (III.22) peut s'écrire :

$$\text{III.23)} \quad [\Sigma_1 - \tau_0 Y^*(\theta)] f_2(\theta) \xi(\theta) = \Sigma_2 - \tau_0 Y^*(\theta)$$

Si l'on s'est fixé la fonction f_2 (en fait il suffit de se fixer $\frac{\partial f_2}{\partial Y^*}$ puisque sa variation en fonction des autres paramètres est déjà déterminée par un essai de fluage sous : $\Sigma_1 > \frac{3\sqrt{6}}{2}$), on peut donc calculer numériquement la réponse à une décharge partielle en procédant pas à pas :

- on calcule $Y^*(\theta)$ en résolvant l'équation implicite (III.23), d'où $f_2(\theta)$;
- on calcule $\dot{E}^p(\theta)$ grâce à l'équation (II.28) qui peut s'écrire :

$$\text{III.24)} \quad \eta \dot{E}^p = \tau_0 [1 - f_2 \xi(\theta)] \left\{ [\alpha_{33}^2] Y^* - [\alpha_{33}] - \frac{Y^* - Y^*(\theta)}{3} \right\} \\ + \frac{\Sigma_1 - \tau_0 Y^*(\theta)}{3} [f_2(\theta) - f_2] \xi(\theta)$$

soit pour $t = \theta$:

$$\eta \dot{E}^p(\theta) = \tau_0 [1 - f_2(\theta) \xi(\theta)] \left\{ [\alpha_{33}^2] Y^*(\theta) - [\alpha_{33}] \right\}$$

— on a ainsi $E^p(\theta + \Delta t)$ d'où l'on déduit par (III.21) $Y^*(\theta + \Delta t)$ et $f_2(\theta + \Delta t)$;

— on calcule $\dot{E}^p(\theta + \Delta t)$ par (III.24) d'où $E^p(\theta + 2\Delta t)$, etc.

Ceci peut se résumer dans le schéma de récurrence :

$$\begin{array}{l}
 n = 1 : E^p(\theta) \rightarrow \dots\dots\dots \\
 \begin{array}{c} n-1 \\ \longrightarrow \end{array} E^p[\theta + (n-1)\Delta t] \rightarrow (\text{III}, 21) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y^*[\theta + (n-1)\Delta t] \\ f_2[\theta + (n-1)\Delta t] \end{array} \right\} \rightarrow (\text{III}, 24) \\
 \hspace{15em} \rightarrow \dot{E}^p[\theta + (n-1)\Delta t] \\
 n E^p[\theta + n\Delta t] \rightarrow \dots\dots\dots \\
 \rightarrow
 \end{array}$$

On peut ainsi déterminer E^p pour $t > \theta$. L'instant de reprise totale est défini par : $Y^* = \frac{3\sqrt{6}}{2}$. Le temps d'hésitation T_H peut, suivant les conventions être défini soit, comme au chapitre II, par la reprise totale, soit, comme on l'a fait sur les résultats expérimentaux, par le début de l'accélération de la reprise

b. Conditions de variation de $f_2(Y^*)$.

f_2 doit vérifier les deux égalités limites :

— pour $Y^* = 2 : f_2 = 1$ (ceci pouvant être étendu à un petit intervalle au-delà de $Y^* = 2$);

— pour :

$$Y^* = \frac{3\sqrt{6}}{2} : f_2 = \frac{<\alpha_{33}>\Sigma_2 - <\alpha_{33}>\tau_0}{\mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{31}^2>)E^p} \times \\
 \left\{ 1 - a \left[\frac{(m-1)a}{ma-1 + \frac{\mu(1-\beta)(1-3<\alpha_{31}^2>)E^p}{<\alpha_{33}^2>\Sigma_2 - <\alpha_{33}>\tau_0}} \right]^{m-1} \right\}$$

On doit avoir par ailleurs :

$$\frac{\partial f_2}{\partial Y^*} \leq 0 \quad \forall Y^* \in \left[2, \frac{3\sqrt{6}}{2} \right]$$

Enfin pour que les propriétés expérimentales d'entraînement des grains bloqués et de convexité de la courbe de fluage soient prises en compte par le modèle, on doit avoir les deux inégalités déjà signalées au chapitre II, et on a déjà vu que ces deux inégalités n'étaient pas incompatibles. Il est donc toujours possible de trouver $\frac{\partial f_2}{\partial Y^*}$ telle que les propriétés d'hésitation soient vérifiées, en plus de celle de similitude.

c. *Remarques sur la propriété d'hésitation.*

On peut trouver dans la littérature quelques allusions à cette propriété. L'étude la plus complète est celle de CARREKER et al. [17] qui traite des déformations plastiques transitoires après variation instantanée de la contrainte, de la température ou de la vitesse de déformation : opérant sur fils de plomb, CARREKER observe un phénomène d'« incubation » et en donne une interprétation par le « temps de nucléation des bandes de glissement ».

Par contre cette propriété ne semble pas avoir été observée sur des monocristaux. Cependant il n'est pas exclu que ce puisse être le cas : l'interprétation donnée ci-dessus peut ne représenter qu'un seul aspect de la réalité (origine intercrystalline de l'hésitation au fluage), ce qui n'exclut pas la possibilité d'une autre origine — *intracrystalline* — du même phénomène. On peut en particulier renvoyer à une interprétation de l'hésitation au fluage par la théorie des dislocations [18] [19] qui peut s'appliquer indifféremment au monocristal et au polycristal — interprétation fondée sur l'allègement des contraintes internes dû au glissement dévié et à l'annihilation de dislocations. Il semble cependant que, dans un polycristal, l'incompatibilité de la déformation élastique due à la désorientation de grains contigus ait des effets plus marqués que celle qui existe à l'intérieur même des différents grains, tout au moins au début de la déformation plastique.

On peut également donner une représentation phénoménologique différente de la propriété d'hésitation par des assemblages particuliers de modèles rhéologiques, dont le plus simple est le modèle de SCHWEDOFF. On peut en effet montrer [18], [21], que ce modèle répond à une décharge partielle en cours de fluage par un arrêt momentané de la déformation « plastique » (glissement du patin à frottement solide), suivi d'une reprise de l'écoulement. L'étude de la réponse à des vibrations sinusoidales montre également de grandes analogies avec les résultats expérimentaux rapportés plus haut.

Il est possible de justifier qualitativement cette analogie de comportement entre le modèle de SCHWEDOFF et le modèle statistique étudié ici par les remarques suivantes : on peut assimiler dans une certaine mesure le modèle de SCHWEDOFF à celui d'un grain particulier subissant l'influence des autres grains ; le patin représente un grain et l'élément de MAXWELL, placé en parallèle, représente l'influence exercée sur ce grain par la matrice. L'analogie n'est cependant valable que pour les grains se bloquant instantanément sous l'effet de la décharge et parvenant à reprendre leur écoulement au bout d'un temps fini. Pour de tels grains en effet on voit bien comment la reprise se produit sous l'influence de l'écoulement dans les autres grains : la relaxation des contraintes dans l'élément de MAXWELL permet en effet, au bout d'un certain temps, le déblocage du patin tout comme, dans le modèle statistique, c'était l'écoulement des grains actifs qui permettait, au bout d'un certain temps, la reprise de l'écoulement plastique dans les grains initialement bloqués.

Le modèle statistique que nous avons proposé fournit ainsi une interprétation physique du modèle de SCHWEDOFF, ou de modèles rhéologiques voisins.

IV. UTILITÉ PRATIQUE DES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES PROPRES AU POLYCRISTAL.

On peut retenir de l'étude ci-dessus au moins deux propriétés qui peuvent avoir une certaine utilité pratique :

a. La présence de deux régimes distincts de fluage, suivant le niveau de contrainte (le premier correspondant à une déformation limitée) permet de dépasser, dans le chargement d'une structure métallique, le seuil de plasticité sans que, pour autant, cette structure finisse pas s'écrouler, à condition que la contrainte n'atteigne pas le seuil de fluage illimité. Les déformations plastiques dans ce premier domaine de fluage étant limitées, et pouvant être réduites, à basse température, à de très faibles valeurs, on peut ainsi diminuer sans risque d'effondrement, le « taux de sécurité », c'est-à-dire pratiquement la section et donc le volume des éléments de la structure.

b. La possibilité d'un blocage de la déformation plastique sous forte contrainte : on a vu en effet qu'il pouvait y avoir blocage indéfini de l'écoulement plastique sous des contraintes élevées, largement supérieures au seuil d'écoulement plastique et même au seuil de fluage illimité, à condition que le matériau ait déjà subi une certaine déformation plastique sous l'effet d'une contrainte plus élevée (ou de vibrations de forte amplitude) puis une décharge partielle (ou un arrêt des vibrations). On peut ainsi charger une structure métallique bien au-delà de sa limite élastique à condition de la surcharger au moment de sa mise en service, puis de la décharger partiellement jusqu'à ses conditions normales d'utilisation.

CONCLUSION

L'étude théorique et expérimentale précédente a permis d'analyser certains aspects de l'influence de la désorientation des grains sur le comportement viscoplastique de matériaux métalliques polycristallins dans un cas particulièrement simple : système C.F.C. et traction simple. On a pu ainsi prévoir et vérifier par l'expérience certaines propriétés directement liées à l'existence de contraintes internes dues à la désorientation des grains dans le polycristal.

Cette démarche nous semble présenter un triple intérêt :

— d'une part elle s'attache à mieux formuler l'évaluation des contraintes internes dans le polycristal en écoulement plastique à partir de modèles classiques existants en précisant les limites, et en proposant certaines améliorations. Cette étude est indispensable si l'on veut représenter par des modèles de mieux en mieux adaptés le comportement des polycristaux réels. Elle ne concerne que l'effet des contraintes internes dans un polycristal viscoplastique et laisse par conséquent libre le choix de telle ou telle loi particulière de comportement pour des cristaux donnés, sous réserve que cette loi soit de type viscoplastique;

— d'autre part elle donne une méthode et un premier exemple de prise en compte systématique, dans un cas particulièrement simple, de la contribution de chacun des grains du polycristal (plus exactement de chaque famille de grains caractérisée par un certain facteur d'orientation). Elle développe ainsi, par exemple, le point de vue de SACHS qui ne s'attachait qu'à l'évaluation d'un comportement moyen, sans individualiser la contribution des diverses familles de grains. Elle constitue à ce titre un premier pas vers la prise en considération plus complète de la géométrie de la déformation plastique, comme de l'anisotropie initiale du polycristal. En particulier, l'hypothèse abusivement simplificatrice d'un seul système de glissement doit être enrichie en prenant en compte l'ensemble des systèmes de glissement possibles et leurs interactions (une première contribution dans ce sens est donnée par l'annexe III qui permet d'évaluer la distribution des coefficients de cisssion pour le système de glissement dévié). D'autre part il faudrait s'attacher à introduire la dispersion des seuils initiaux d'écoulement τ_0 dans les différents grains, dans le même esprit que le travail de BUI [20]

— enfin elle donne, malgré la simplification des hypothèses de définition du modèle et son caractère semi-empirique, certaines conclusions vérifiées par l'expérience sur le comportement viscoplastique des polycristaux réels (écrouissage, domaines de fluage, hésitation au fluage, comportement sous vibrations). A ce titre l'étude menée permet déjà des applications pratiques intéressantes.

ANNEXE I

EXPRESSION DES α_{ij} POUR LE SYSTÈME PRINCIPAL

Avec les notations du chapitre II, § A.2, on a :

1. DANS LE DOMAINE A :

$$\begin{aligned}\sqrt{6} \alpha_{11} = & \cos^2 \psi \sin \varphi (\sin \varphi - \cos \varphi) + \sin \psi \cos \psi [\cos \varphi \sin \theta + 2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta \\ & - (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos \theta] - \sin^2 \psi [\sin^2 \theta + \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \\ & - \cos \varphi (\sin \varphi + \cos \varphi) \cos^2 \theta]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{6} \alpha_{22} = & \sin^2 \psi \sin \varphi (\sin \varphi - \cos \varphi) + \sin \psi \cos \psi [-\cos \varphi \sin \theta \\ & - 2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos \theta] \\ & + \cos^2 \psi [-\sin^2 \theta - \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + \cos \varphi (\sin \varphi + \cos \varphi) \cos^2 \theta]\end{aligned}$$

$$\sqrt{6} \alpha_{33} = (\sin \varphi + \cos \varphi) \cos \varphi \sin^2 \theta + \sin \varphi \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta$$

$$\begin{aligned}2 \sqrt{6} \alpha_{23} = & \sin \psi [\sin \theta (\cos 2 \varphi - \sin 2 \varphi) + \cos \theta \cos \varphi] \\ & + \cos \psi [\sin 2 \theta (1 + \cos^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + \cos 2 \theta \sin \varphi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \sqrt{6} \alpha_{13} = & \cos \psi [\sin \theta (\cos 2 \varphi - \sin 2 \varphi) + \cos \theta \cos \varphi] \\ & - \sin \psi [\sin 2 \theta (1 + \cos^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + \cos 2 \theta \sin \varphi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \sqrt{6} \alpha_{12} = & \sin 2 \psi [\sin^2 \theta - \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi + \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \\ & - \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta - \sin \varphi \cos \varphi] + \cos 2 \psi [\cos 2 \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta \\ & - \sin 2 \varphi \cos \theta]\end{aligned}$$

2. DANS LE DOMAINE B.

$$\begin{aligned}\sqrt{6} \alpha_{11} = & \cos^2 \psi \cos \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) + \sin \psi \cos \psi [-\sin \varphi \sin \theta \\ & - 2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta - (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos \theta] + \sin^2 \psi [\sin \varphi (\sin \varphi \\ & + \cos \varphi) \cos^2 \theta - \cos \varphi \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{6} \alpha_{22} = & \sin^2 \psi \cos \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) + \sin \psi \cos \psi [\sin \varphi \sin \theta \\ & + 2 \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \cos \theta] + \cos^2 \psi [\sin \varphi (\sin \varphi \\ & + \cos \varphi) \cos^2 \theta - \cos \varphi \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta]\end{aligned}$$

$$\sqrt{6} \alpha_{33} = (\sin \varphi + \cos \varphi) \sin \varphi \sin^2 \theta + \cos \varphi \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta$$

$$\begin{aligned}2 \sqrt{6} \alpha_{23} = & \sin \psi [\sin \theta (\sin 2 \varphi + \cos 2 \varphi) - \sin \varphi \cos \theta] + \cos \psi [\sin 2 \theta (1 \\ & + \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + \cos 2 \theta \cos \varphi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \sqrt{6} \alpha_{13} = & \cos \psi [\sin \theta (\sin 2 \varphi + \cos 2 \varphi) - \sin \varphi \cos \theta] - \sin \psi [\sin 2 \theta (1 \\ & + \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) + \cos 2 \theta \cos \varphi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \sqrt{6} \alpha_{12} = & \sin 2 \psi [\sin^2 \theta - \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \cos^2 \varphi + \cos \varphi \sin \theta \cos \theta \\ & - \sin \varphi \cos \varphi \cos^2 \theta - \sin \varphi \cos \varphi] + \cos 2 \psi [\sin 2 \varphi \cos \theta \\ & + \sin \varphi \sin \theta + \cos 2 \varphi \cos \theta]\end{aligned}$$

ANNEXE II

CALCUL DE $P(\alpha_{33})$ ET $P_c(\alpha_{33})$

On fixera la maille du cristal C.F.C. et la direction de l'axe de traction sera considérée comme variable. Cette dernière est représentée par un point (u', v', w') ou (θ', φ') sur la demi-sphère unité $u' > 0$, avec :

$$\begin{cases} u' = \cos \varphi' \sin \theta' \\ v' = \sin \varphi' \sin \theta' \\ w' = \cos \theta' \end{cases}$$

La densité de probabilité s'écrit simplement :

$$P(\theta', \varphi') = \frac{\sin \theta'}{2\pi}$$

On détermine sur la demi-sphère unité 24 triangles sphériques égaux, correspondant aux différents systèmes de glissement principaux possibles suivant la direction de l'axe de traction. Par raison de symétrie, le calcul peut être fait sur un seul triangle sphérique, par exemple le triangle Δ défini par :

$$w' > u' > v' > 0$$

correspondant au système $(1 \bar{1} 1)$, $[0 1 1]$, et où α_{33} a pour expression :

$$\alpha_{33} = \frac{1}{\sqrt{6}} (u' - v' + w') (v' + w')$$

Soit $\mathcal{A}(\alpha_{33}) d\alpha_{33}$ l'aire sphérique intérieure à Δ comprise entre les courbes α_{33} et $(\alpha_{33} + d\alpha_{33})$. On aura alors simplement :

$$P(\alpha_{33}) = \frac{12}{\pi} \mathcal{A}(\alpha_{33})$$

$$P_c(\alpha_{33}) = \frac{12}{\pi} \int_0^{\alpha_{33}} \mathcal{A}(\alpha) d\alpha$$

Pour calculer $\mathcal{A}(\alpha_{33})$ il est commode d'effectuer le changement de coordonnées suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{u' - v' + w'}{\sqrt{3}} \\ Y = \frac{v' + w'}{\sqrt{2}} \\ Z = \frac{2u' + v' - w'}{\sqrt{6}} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = \frac{\sqrt{3} X + \sqrt{6} Z}{3} \\ v' = -\frac{X}{\sqrt{3}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} + \frac{Z}{\sqrt{6}} \\ w' = \frac{X}{\sqrt{3}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} - \frac{Z}{\sqrt{6}} \end{array} \right.$$

L'axe Z est ainsi parallèle aux génératrices $(-2, -1, 1)$ du cylindre hyperbolique équilatère ($\alpha_{33} = \text{cte}$), et l'équation de ce dernier devient :

$$XY = \alpha_{33}$$

Pour avoir directement l'aire cherchée sous la forme $\mathcal{A}(\alpha_{33}) d\alpha_{33}$, il suffit d'adopter, dans le plan $Z = 0$ un système de coordonnées curvilignes dont (α_{33}) soit l'une des familles — par exemple le système (α_{33}, θ) , où θ désigne l'angle polaire d'origine $\vec{OX}$. L'élément d'aire étant égal à : $\frac{dX dY}{\sqrt{1 - X^2 - Y^2}}$ on obtiendra directement $\mathcal{A}(\alpha_{33})$ en écrivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \sqrt{\frac{\alpha_{33}}{tg \theta}} \\ Y = \sqrt{\alpha_{33} tg \theta} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} dX dY = \frac{d\theta d\alpha_{33}}{\sin 2\theta} \\ 1 - X^2 - Y^2 = 1 - \frac{2\alpha_{33}}{\sin 2\theta} \end{array} \right.$$

Par suite :

$$(A.1) \quad \mathcal{A}(\alpha_{33}) = \int_{\theta} [\sin 2\theta (\sin 2\theta - 2\alpha_{33})]^{-1/2} d\theta$$

1. CALCUL DE $P(\alpha_{33})$.

Il passe par le calcul d'intégrales de la forme :

$$I(\theta_0, \theta_1) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} [\sin 2\theta (\sin 2\theta - 2\alpha_{33})]^{-1/2} d\theta$$

En posant :

$$(A.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \psi = \frac{a^2 - tg \theta}{a^2 - 1/a^2} \\ a^2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\alpha_{33}^2}}{2\alpha_{33}} \\ \cos \alpha = \frac{1}{a^2} \end{array} \right.$$

On trouve :

$$\begin{aligned}
 \text{A.3) } I(\theta_0, \theta_1) &= \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} \int_{\psi_1}^{\psi_0} [1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \psi]^{-1/2} d\psi \\
 &= \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} [F(\psi_0; \alpha) - F(\psi_1; \alpha)]
 \end{aligned}$$

où $F(\psi; \alpha)$ est une intégrale elliptique indéfinie de première espèce.

Il ne reste plus qu'à déterminer les valeurs des bornes (θ_0, θ_1) ou (ψ_0, ψ_1) de ces intégrales, qui correspondent aux points d'intersection des côtés du triangle sphérique Δ avec les cylindres hyperboliques (α_{33}) . En adoptant les définitions précisées sur la figure 29, on obtient aisément :

$$\begin{aligned}
 \text{A.4) } \left\{ \begin{aligned}
 tg \theta_1 &= \frac{1}{8 \alpha_{33}} (3 + \sqrt{9 - 48 \alpha_{33}^2}) \\
 tg \theta_2 &= \frac{1}{8 \alpha_{33}} (3 - \sqrt{9 - 48 \alpha_{33}^2}) \\
 tg \theta_3 &= \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{8 \alpha_{33}} (1 + \sqrt{1 + 8 \sqrt{6} \alpha_{33} - 48 \alpha_{33}^2}) \\
 tg \theta_4 &= \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{1}{8 \alpha_{33}} (1 - \sqrt{1 + 8 \sqrt{6} \alpha_{33} - 48 \alpha_{33}^2}) \\
 tg \theta_5 &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{8 \alpha_{33}} (1 + \sqrt{1 + 4 \sqrt{6} \alpha_{33} - 24 \alpha_{33}^2}) \\
 tg \theta_6 &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{1}{8 \alpha_{33}} (1 - \sqrt{1 + 4 \sqrt{6} \alpha_{33} - 24 \alpha_{33}^2})
 \end{aligned} \right. \\
 \psi_7 &= 0 \quad \psi_8 = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

On trouve alors pour P les différentes expressions données dans le tableau A et représentées sur la figure 5.

2. CALCUL DE $P_c(\alpha_{33})$.

Si l'on désigne par $\mathcal{O}(\tilde{\alpha}_{33})$ la projection sur $Z=0$ de la portion du triangle sphérique Δ limitée par la courbe $(\tilde{\alpha}_{33})$, on a par définition :

$$\begin{aligned}
 \text{A.5) } P_c(\tilde{\alpha}_{33}) &= \int_0^{\tilde{\alpha}_{33}} P(\alpha_{33}) d\alpha_{33} \\
 &= \frac{12}{\pi} \int \int_{(\tilde{\alpha}_{33})} [\sin 2\theta (\sin 2\theta - 2\alpha_{33})]^{-1/2} d\alpha_{33} d\theta \\
 &= \int_{\theta} \left[\left(1 - \frac{2\alpha_{33}^0}{\sin 2\theta}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2\alpha_{33}^1}{\sin 2\theta}\right)^{1/2} \right] d\theta
 \end{aligned}$$

où α_{33}^0 et α_{33}^1 sont les coordonnées (α_{33}) des points d'intersection de la droite θ avec la frontière du domaine $\mathcal{O}(\alpha_{33})$.

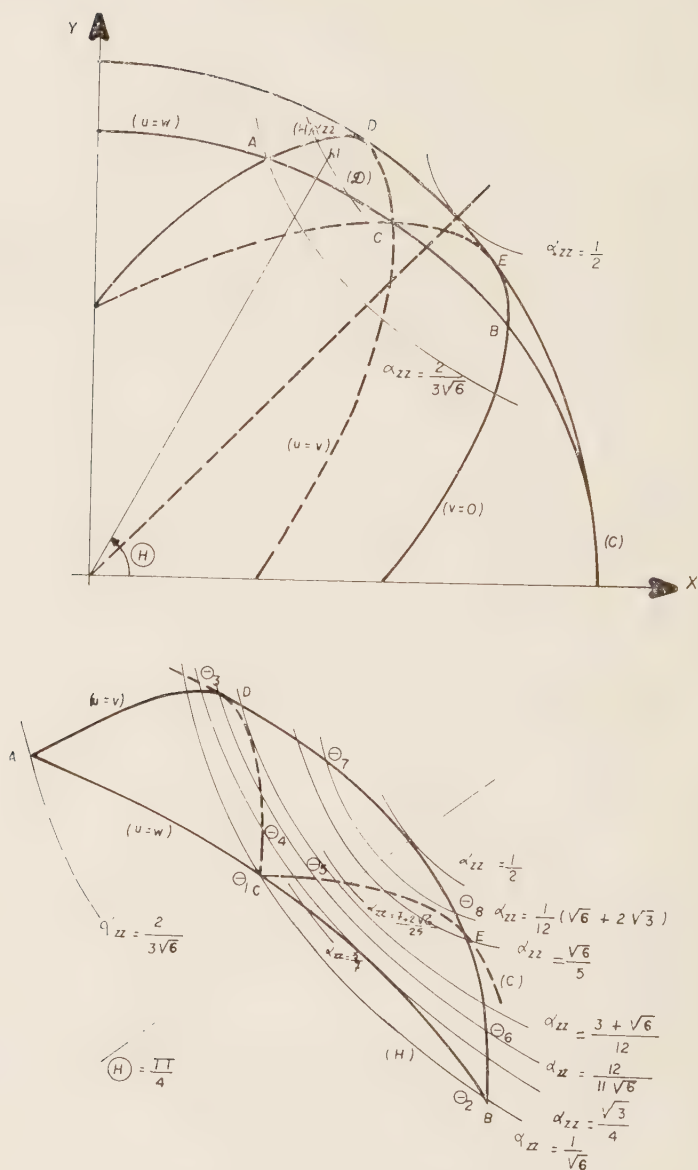


FIG. 29. — Calcul de $P(\alpha_{zz})$ et $P_c(\alpha_{zz})$ = délimitation des domaines (b) (α_{zz})

Cette expression peut se simplifier si l'on adopte, dans le plan $Z = 0$, un système de coordonnées polaires (ρ, θ) et si l'on remarque que le passage des coordonnées (α_{33}, θ) aux coordonnées (ρ, θ) se fait par la relation :

$$\rho^2 = \frac{2 \alpha_{33}}{\sin 2 \theta}$$

de sorte que les quantités : $\left(1 - \frac{2 \alpha_{33}^0}{\sin 2 \theta}\right)^{1/2}$ s'écrivent $(1 - \rho_0^2)^{1/2}$, où ρ_0^2 s'obtient directement en fonction de $\tilde{\alpha}_{33}$ et θ en écrivant l'équation des frontières de $\mathcal{Q}(\tilde{\alpha}_{33})$ en coordonnées polaires. Il est facile de voir qu'on a alors à calculer 4 sortes d'intégrales :

$$I_0(\theta'_1, \theta'_2) = \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} \left[1 - \frac{2 \tilde{\alpha}_{33}}{\sin 2 \theta}\right]^{1/2} d\theta$$

$$I_1(\theta'_1, \theta'_2) = \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} \left[1 - \left(\cos^2 \theta + \frac{4}{3} \sin^2 \theta\right)^{-1}\right]^{1/2} d\theta$$

$$I_2(\theta'_1, \theta'_2) = \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} \left[1 - (9 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta - 4 \sqrt{6} \sin \theta \cos \theta)^{-1}\right]^{1/2} d\theta$$

$$I_3(\theta'_1, \theta'_2) = \int_{\theta'_1}^{\theta'_2} \left[1 - (3 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta - 2 \sqrt{6} \sin \theta \cos \theta)^{-1}\right]^{1/2} d\theta$$

Les bornes θ'_1 et θ'_2 font intervenir les angles θ_1 à θ_6 déjà calculés, ainsi que les angles polaires des points A, B, C, D, E de la figure 29 :

$$tg \theta_A = \sqrt{6}; \quad tg \theta_B = \frac{\sqrt{6}}{4}; \quad tg \theta_C = \frac{\sqrt{6}}{2}; \quad tg \theta_D = 2\sqrt{\frac{2}{3}}; \quad tg \theta_E = \sqrt{\frac{2}{3}};$$

Les intégrales I_1 , I_2 et I_3 se calculent sans difficulté : par des changements de variables adéquats, elles se ramènent toutes à la forme :

$$\pm \int_{u_1}^{u_2} (1 - u^2)^{-1/2} du = \pm [\arcsin u_2 - \arcsin u_1]$$

Le calcul de I_0 se fait de la façon suivante :

$$- \text{si } \theta'_1 < \theta'_2 < \frac{\pi}{4}$$

on pose :

$$\sin \psi = \frac{1}{k} tg \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) \quad \text{où} \quad k^2 = \frac{1 - 2 \tilde{\alpha}_{33}}{1 + 2 \tilde{\alpha}_{33}}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} (A.6) \quad I_0(\theta'_1, \theta'_2) &= \frac{2}{\sqrt{1 + 2 \tilde{\alpha}_{33}}} \int_{\psi'_2}^{\psi'_1} [1 + k^2 \sin^2 \psi]^{-1} [1 - k^2 \sin^2 \psi]^{-1/2} d\psi \\ &\quad - \sqrt{1 + 2 \tilde{\alpha}_{33}} \int_{\psi'_2}^{\psi'_1} [1 - k^2 \sin^2 \psi]^{-1/2} d\psi \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + 2 \tilde{\alpha}_{33}}} [\Pi(\psi'_1, k^2, k) - \Pi(\psi'_2, k^2, k)] \\ &\quad - \sqrt{1 + 2 \tilde{\alpha}_{33}} [F(\psi'_1, k) - F(\psi'_2, k)] \end{aligned}$$

où $F(\psi_0, k)$ est une intégrale elliptique indéfinie de 1^{re} espèce, et où $\Pi(\psi_0, n, k)$ est une intégrale elliptique indéfinie de 3^e espèce dont il existe des tables [13] :

$$- \text{Si } \frac{\pi}{4} < \theta'_1 < \theta'_2$$

on pose :

$$\sin \psi = \frac{1}{k} \operatorname{tg} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

On obtient alors le même résultat que dans le cas précédent à condition d'intervertir les bornes ψ'_1 et ψ'_2 . On doit remarquer que : $\psi_7 = \psi_8 = \frac{\pi}{2}$.

- Si $\theta'_1 < \frac{\pi}{4} < \theta'_2$: on décompose l'intervalle d'intégration en deux intervalles contigus bornés par $\frac{\pi}{4}$ et on utilise les deux résultats précédents.

On obtient en fin de compte pour $P_c(\alpha_{33})$ les différentes expressions données dans le tableau B et représentées sur la figure 6.

TABLEAU A

Calcul de $P(\alpha_{33})$

$$\textcircled{1} \quad \frac{2}{3\sqrt{6}} \leq \alpha_{33} \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$P(\alpha_{33}) = \frac{12}{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} [F(\psi_1, \alpha) - F(\psi_3, \alpha)]$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \leq \alpha_{33} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$P(\alpha_{33}) = \frac{12}{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} [F(\psi_1, \alpha) + F(\psi_6, \alpha) + F(\psi_5, \alpha) - F(\psi_3, \alpha) - F(\psi_2, \alpha) - F(\psi_4, \alpha)]$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \alpha_{33} \leq \frac{12}{11\sqrt{6}}$$

$$P(\alpha_{33}) = \frac{12}{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} [F(\psi_5, \alpha) + F(\psi_6, \alpha) - F(\psi_3, \alpha) - F(\psi_4, \alpha)]$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{12}{11\sqrt{6}} \leq \alpha_{33} \leq \frac{3 + \sqrt{6}}{12}$$

$$P(\alpha_{33}) = \frac{12}{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} [F(\psi_5, \alpha) + F(\psi_6, \alpha) + F(\psi_3, \alpha) - F(\psi_4, \alpha)]$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{3 + \sqrt{6}}{12} \leq \alpha_{33} \leq \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$P(\alpha_{33}) = \frac{12}{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} [F(\psi_5, \alpha) + F(\psi_6, \alpha)]$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{\sqrt{6}}{5} \leq \alpha_{33} \leq \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{12}$$

$$P(\alpha_{33}) = \frac{12}{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} [F(\psi_5, \alpha) + 2F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) - F(\psi_6, \alpha)]$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{12} \leq \alpha_{33} \leq \frac{1}{2}$$

$$P(\alpha_{33}) = \frac{24}{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$$

TABLEAU B
Calcul de $P_c(\alpha_{33})$

$$① \quad \frac{2}{3\sqrt{6}} \leq \alpha_{33} \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$P_c(\alpha_{33}) = \frac{12}{\pi} \left\{ \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_1}} \right] - \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_1}} \right] \right. \\ - \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}\operatorname{tg} \theta_3}{2\sqrt{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_3}} \right] + \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}\operatorname{tg} \theta_\lambda}{2\sqrt{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_\lambda}} \right] \\ - \frac{2}{\sqrt{1+2\alpha_{33}}} [\Pi(\psi_3, k^2, k) - \Pi(\psi_1, k^2, k)] \\ \left. + \sqrt{1+2\alpha_{33}} [F(\psi_3, k) - F(\psi_1, k)] \right\}$$

$$\text{avec } \psi_i = \arcsin \left[\frac{\operatorname{tg} \theta_i - 1}{k(1+\operatorname{tg} \theta_i)} \right]$$

$$② \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \leq \alpha_{33} \leq \frac{3}{7}$$

$$P_c(\alpha_{33}) = \frac{12}{\pi} \left\{ \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_B}} \right] - \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_2}} \right] \right. \\ + \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_1}} \right] - \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_1}} \right] \\ + \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}\operatorname{tg} \theta_4}{2\sqrt{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_4}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}\operatorname{tg} \theta_C}{2\sqrt{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_C}} \right] \\ + \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}\operatorname{tg} \theta_\lambda}{2\sqrt{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_\lambda}} \right] \\ - \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}\operatorname{tg} \theta_3}{2\sqrt{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_3}} \right] + \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2\operatorname{tg} \theta_5}{2\sqrt{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_5}} \right] \\ - \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2\operatorname{tg} \theta_C}{2\sqrt{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_C}} \right] + \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2\operatorname{tg} \theta_B}{2\sqrt{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_B}} \right] \\ - \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2\operatorname{tg} \theta_6}{2\sqrt{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta_6}} \right] - \frac{2}{\sqrt{1+2\alpha_{33}}} [\Pi(\psi_4, k^2, k) - \Pi(\psi_5, k^2, k)] \\ + \sqrt{1+2\alpha_{33}} [F(\psi_4, k) - F(\psi_5, k)] \\ - \frac{2}{\sqrt{1+2\alpha_{33}}} [\Pi(\psi_3, k^2, k) - \Pi(\psi_1, k^2, k)] \\ + \sqrt{1+2\alpha_{33}} [F(\psi_3, k) - F(\psi_1, k)] \\ - \frac{2}{\sqrt{1+2\alpha_{33}}} [\Pi(\psi_6, k^2, k) - \Pi(\psi_2, k^2, k)] \\ \left. + \sqrt{1+2\alpha_{33}} [F(\psi_6, k) - F(\psi_2, k)] \right\}$$

$$\text{avec pour } \psi_1, \psi_3, \psi_5, \psi_4 : \psi_i = \arcsin \left[\frac{\operatorname{tg} \theta_i - 1}{k(1+\operatorname{tg} \theta_i)} \right]$$

$$\text{et pour } \psi_6 \text{ et } \psi_2 : \psi_j = \arcsin \left[\frac{1 - \operatorname{tg} \theta_j}{k(1+\operatorname{tg} \theta_j)} \right]$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{3}{7} \leq \alpha_{33} \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$$

même expression que $\textcircled{2}$ mais en changeant $\Pi(\psi_1, k^2, k)$ et $F(\psi_1, k)$ en $-\Pi(\psi_1, k^2, k)$ et $-F(\psi_1, k)$ et en prenant :

$$\psi_1 = \arcsin \left[\frac{1 - tg \theta_1}{k(1 + tg \theta_1)} \right]$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\sqrt{3}}{4} \leq \alpha_{33} \leq \frac{12}{11\sqrt{6}}$$

$$\begin{aligned} P_c(\alpha_{33}) = \frac{12}{\pi} \bigg\{ & \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1 + tg^2 \theta_B}} \right] - \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1 + tg^2 \theta_A}} \right] \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2} tg \theta_4}{2\sqrt{3}\sqrt{1 + tg^2 \theta_4}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2} tg \theta_C}{2\sqrt{3}\sqrt{1 + tg^2 \theta_C}} \right] \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2} tg \theta_A}{2\sqrt{3}\sqrt{1 + tg^2 \theta_A}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2} tg \theta_3}{2\sqrt{3}\sqrt{1 + tg^2 \theta_3}} \right] \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{6} + 2 tg \theta_5}{2\sqrt{3}\sqrt{1 + tg^2 \theta_5}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{6} + 2 tg \theta_C}{2\sqrt{3}\sqrt{1 + tg^2 \theta_C}} \right] \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{6} + 2 tg \theta_B}{2\sqrt{3}\sqrt{1 + tg^2 \theta_B}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{6} + 2 tg \theta_6}{2\sqrt{3}\sqrt{1 + tg^2 \theta_6}} \right] \\ & - \frac{2}{\sqrt{1 + 2\alpha_{33}}} [\Pi(\psi_4, k^2, k) - \Pi(\psi_5, k^2, k)] \\ & + \sqrt{1 + 2\alpha_{33}} [F(\psi_4, k) - F(\psi_5, k)] \\ & - \frac{2}{\sqrt{1 + 2\alpha_{33}}} [\Pi(\psi_6, k^2, k) + \Pi(\psi_3, k^2, k)] \\ & + \sqrt{1 + 2\alpha_{33}} [F(\psi_6, k) + F(\psi_3, k)] \end{aligned}$$

avec pour ψ_4, ψ_5, ψ_3 : $\psi_i = \arcsin \left[\frac{tg \theta_i - 1}{k(1 + tg \theta_i)} \right]$ et

$$\psi_6 = \arcsin \left[\frac{1 - tg \theta_6}{k(1 + tg \theta_6)} \right]$$

$$(5) \quad \frac{12}{11\sqrt{6}} \leq \alpha_{33} \leq \frac{3+\sqrt{6}}{12}$$

$$\begin{aligned} P_c(\alpha_{33}) = & \frac{12}{\pi} \left\{ \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1+tg^2\theta_B}} \right] - \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1+tg^2\theta_A}} \right] \right. \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}tg\theta_4}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_4}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}tg\theta_C}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_C}} \right] \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}tg\theta_A}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_A}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}tg\theta_3}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_3}} \right] \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2tg\theta_5}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_5}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2tg\theta_C}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_C}} \right] \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2tg\theta_B}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_B}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2tg\theta_6}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_6}} \right] \\ & - \frac{2}{\sqrt{1+2\alpha_{33}}} [\Pi(\psi_4, k^2, k) - \Pi(\psi_5, k^2, k)] \\ & + \sqrt{1+2\alpha_{33}} [F(\psi_4, k) - F(\psi_5, k)] \\ & - \frac{4}{\sqrt{1+2\alpha_{33}}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, k^2, k\right) + 2\sqrt{1+2\alpha_{33}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \\ & + \frac{2}{\sqrt{1+2\alpha_{33}}} [\Pi(\psi_3, k^2, k) - \Pi(\psi_6, k^2, k)] \\ & - \sqrt{1+2\alpha_{33}} [F(\psi_3, k) - F(\psi_6, k)] \left. \right\} \end{aligned}$$

avec pour ψ_3, ψ_4, ψ_5 : $\psi_i = \arcsin \left[\frac{tg\theta_i - 1}{k(1+tg\theta_i)} \right]$ et

$$\psi_6 = \arcsin \left[\frac{1 - tg\theta_6}{k(1+tg\theta_6)} \right]$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{3+\sqrt{6}}{12} \leq \alpha_{33} \leq \frac{7+2\sqrt{6}}{25}$$

$$\begin{aligned} P_c(\alpha_{33}) = & \frac{12}{\pi} \left\{ \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1+tg^2\theta_B}} \right] - \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1+tg^2\theta_A}} \right] \right. \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}tg\theta_A}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_A}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}tg\theta_C}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_C}} \right] \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2tg\theta_5}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_5}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2tg\theta_C}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_C}} \right] \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2tg\theta_B}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_B}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2tg\theta_6}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_6}} \right] \\ & - \frac{4}{\sqrt{1+2\alpha_{33}}} \Pi \left(\frac{\pi}{2}, k^2, k \right) + 2\sqrt{1+2\alpha_{33}} F \left(\frac{\pi}{2}, k \right) \\ & + \frac{2}{\sqrt{1+2\alpha_{33}}} [\Pi(\psi_5, k^2, k) - \Pi(\psi_6, k^2, k)] \\ & \left. - \sqrt{1+2\alpha_{33}} [F(\psi_5, k) - F(\psi_6, k)] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \psi_5 = \arcsin \left[\frac{tg\theta_5-1}{k(1+tg\theta_5)} \right] \text{ et } \psi_6 = \arcsin \left[\frac{1-tg\theta_6}{k(1+tg\theta_6)} \right]$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{7+2\sqrt{6}}{25} \leq \alpha_{33} \leq \frac{\sqrt{6}}{5}$$

Même résultat qu'en 6 mais en changeant $\Pi(\psi_5, k^2, k)$ et $F(\psi_5, k)$ en $-\Pi(\psi_5, k^2, k)$ et $-F(\psi_5, k)$ et en prenant :

$$\psi_5 = \arcsin \left[\frac{1-tg\theta_5}{k(1+tg\theta_5)} \right]$$

$$8/ \frac{\sqrt{6}}{5} \leq \alpha_{33} \leq \frac{\sqrt{6+2\sqrt{3}}}{12}$$

$$\begin{aligned} P_c(\alpha_{33}) = & \frac{12}{\pi} \left\{ \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1+tg^2\theta_B}} \right] - \arcsin \left[\frac{1}{2\sqrt{1+tg^2\theta_A}} \right] \right. \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}tg\theta_A}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_A}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}tg\theta_C}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_C}} \right] \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2tg\theta_5}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_5}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2tg\theta_C}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_C}} \right] \\ & + \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2tg\theta_B}{2\sqrt{3}\sqrt{1+tg^2\theta_B}} \right] - \arcsin \left[\frac{\sqrt{6}+2tg\theta_6}{2\sqrt{2}\sqrt{1+tg^2\theta_6}} \right] \\ & - \frac{8}{\sqrt{1+2\alpha_{33}}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, k^2, k\right) + 4\sqrt{1+2\alpha_{33}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \\ & + \frac{2}{\sqrt{1+2\alpha_{33}}} [\Pi(\psi_6, k^2, k) - \Pi(\psi_5, k^2, k)] \\ & \left. - \sqrt{1+2\alpha_{33}} [F(\psi_6, k) - F(\psi_5, k)] \right\} \end{aligned}$$

$$\text{avec pour } \psi_5 \text{ et } \psi_6 : \psi_i = \arcsin \left[\frac{1-tg\theta_i}{k(1+tg\theta_i)} \right]$$

$$(9) \quad \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{12} \leq \alpha_{33} \leq \frac{1}{2}$$

$$P_c(\alpha_{33}) = 1 - \frac{48}{\pi} \left[\frac{2}{\sqrt{1+2\alpha_{33}}} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, k^2, k\right) - \sqrt{1+2\alpha_{33}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \right]$$

ANNEXE III

CALCUL DE LA DISTRIBUTION DU COEFFICIENT DE CISSION α_{33}^D
POUR LES SYSTÈMES DE GLISSEMENT DÉVIÉ
(SYSTÈME C.F.C. — TRACTION SIMPLE)

Les systèmes de glissement dévié sont particulièrement importants puisque ce sont eux qui sont actifs dès l'apparition de « cross-slip ». Ils se définissent par rapport aux systèmes de glissement principaux par le fait qu'ils ont la même direction de glissement (dans un plan différent de la même famille).

1. EXPRESSION DE α_{33}^D ET CALCULS PRÉLIMINAIRES.

La division de la demi-sphère unité en 24 triangles sphériques égaux (voir annexe II), reste valable pour la définition de α_{33}^D , coefficient de cission dans le système de glissement dévié. Par raison de symétrie, on peut là encore se limiter à l'étude d'un triangle sphérique particulier. Prenons le même triangle que pour le calcul de α_{33} , c'est-à-dire le triangle Δ défini par les conditions :

$$w' > u' > v' > 0$$

Au système de glissement principal $(1 \ 1 \ 1) [0 \ 1 \ 1]$ correspond le système de glissement dévié $(1 \ 1 \ \bar{1}) [0 \ 1 \ 1]$ ou $(1 \ 1 \ \bar{1}) [0 \ \bar{1} \ \bar{1}]$. Pour tenir compte des deux sens de glissement dévié possibles pour la direction $[0 \ 1 \ 1]$, nous prendrons α_{33}^D en valeur absolue. On trouve aisément :

$$\alpha_{33}^D = \frac{1}{\sqrt{6}} |u' + v' - w'| \cdot |v' + w'|$$

Effectuons le changement de coordonnées suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{u' + v' - w'}{\sqrt{3}} \\ Y = \frac{v' + w'}{\sqrt{2}} \\ Z = \frac{2u' + w' - v'}{\sqrt{6}} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = \frac{\sqrt{3}}{3} X + \frac{\sqrt{6}}{3} Z \\ v' = \frac{\sqrt{3}}{3} X + \frac{\sqrt{2}}{2} Y - \frac{\sqrt{6}}{6} Z \\ w' = -\frac{\sqrt{3}}{3} X + \frac{\sqrt{2}}{2} Y - \frac{\sqrt{6}}{6} Z \end{array} \right.$$

Il transforme la sphère $u'^2 + v'^2 + w'^2 = 1$ en $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ et le cylindre :

$$|u' + v' - w'| (v' + w') = \sqrt{6} \alpha_{33}^D \text{ en } |X| \cdot Y = \alpha_{33}^D.$$

En adoptant le système de coordonnées curvilignes (α_{33}^D, θ) , on a comme précédemment (A.1) :

$$(A.7) \quad P^D(\alpha_{33}^D) = \frac{12}{\pi} \int_{\theta} [\sin 2\theta (\sin 2\theta - 2\alpha_{33}^D)]^{-1/2} d\theta$$

Comme $(u' + v' - w')$ change de signe avec X , il faut considérer les demi-hyperboles $XY = \alpha_{33}^D$ et $XY = -\alpha_{33}^D$ pour $Y > 0$. Les bornes θ de l'intégrale (A.7) sont obtenues comme angles polaires des points d'intersection des hyperboles $XY = \pm \alpha_{33}^D$ avec les projections sur $Z = 0$ des côtés du triangle sphérique ABC. (fig. 30).

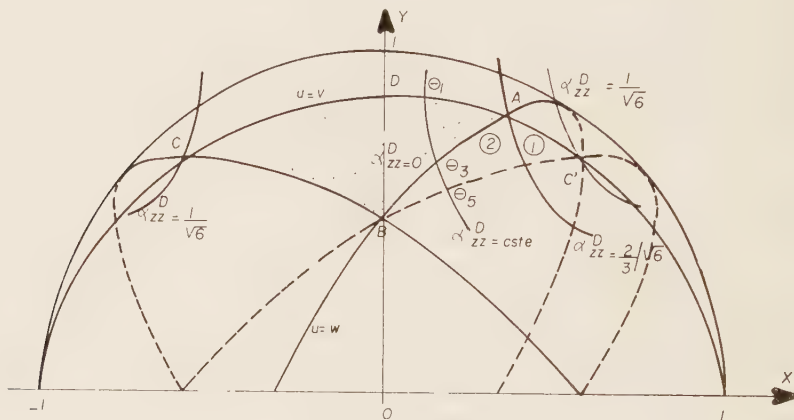


FIG. 30. — Domaine de définition de α_{33}^D .

Or il est possible de se limiter aux hyperboles $XY = \alpha_{33}^D$ si l'on envisage le symétrique DBC' par rapport à OY du triangle DCB : on retrouve ainsi les trois ellipses envisagées dans le cas précédent, de sorte que les angles θ_1 sont déjà calculés (A.4). Pour garder les expressions précédentes — en changeant α_{33} en α_{33}^D — on appellera θ_1 , θ_3 , et θ_5 , les angles polaires des points d'intersection de l'hyperbole $XY = \alpha_{33}^D$ avec les côtés DA (ou DC'), BA et BC'.

2. CALCUL DE LA DENSITÉ DE PROBABILITÉ $P^D(\alpha_{33}^D)$.

$A^D(\alpha_{33}^D)$ a cette fois seulement deux expressions différentes suivant que l'on a :

$$0 \leq \alpha_{33}^D \leq \frac{2}{3\sqrt{6}}$$

ou bien :

$$\frac{2}{3\sqrt{6}} \leq \alpha_{33}^D \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$P^D(\alpha_{33}^D)$ s'obtient donc immédiatement (tableau C).

TABLEAU C

Calcul de $P^D(\alpha_3^D)$

1	$\frac{2}{3\sqrt{6}} \leq \alpha_{33}^D \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$
$P^D(\alpha_{33}^D) = \frac{12}{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} [F(\psi_5, \alpha) - F(\psi_1, \alpha)]$	
2	$0 \leq \alpha_{33}^D \leq \frac{1}{\sqrt{6}}$
$P^D(\alpha_{33}^D) = \frac{12}{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} [F(\psi_5, \alpha) + F(\psi_3, \alpha) - 2F(\psi_1, \alpha)]$	

ans ce tableau α , F et ψ_1 ont la même définition que dans le cas précédent, en remplaçant α_{33} par α_{33}^D . La courbe $P^D(\alpha_{33}^D)$ est donnée par la figure 31.

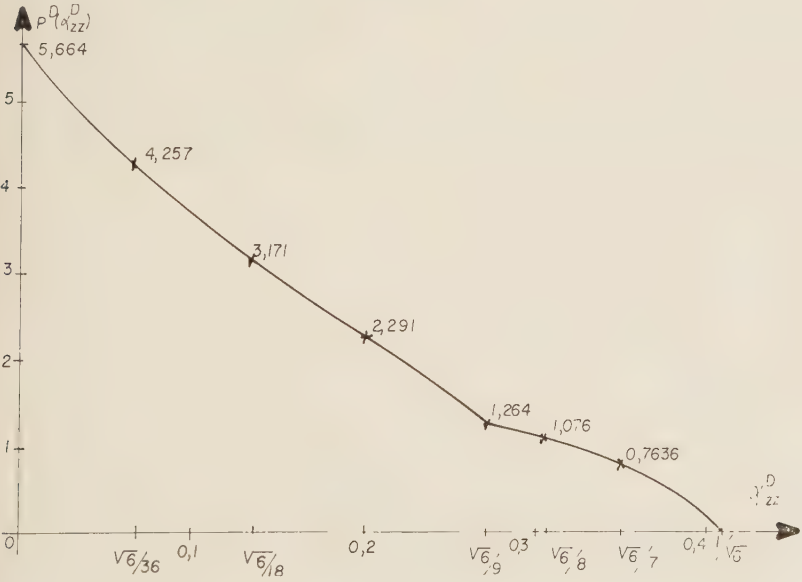


FIG. 31. — $P^D(\alpha')$

REMARQUE. — Il est utile de calculer la valeur moyenne $\langle \alpha_{33}^D \rangle$ en reportant à la demi-sphère unité et en exprimant α_{33}^D en fonction des coordonnées (θ', φ') . On sait que la densité de probabilité est proportionnelle à $\sin \theta'$. On aura donc en tenant compte du changement de signe de $(u' + v' - w')$,

$$\begin{aligned}
 (A.8) \quad \langle \alpha_{33}^D \rangle = & \frac{12}{\pi \sqrt{6}} \int_0^\pi d\varphi' \int_0^{\arctan \left(\frac{1}{\sin \varphi' + \cos \varphi'} \right)} [\cos \theta' - \sin \theta' (\sin \theta' \sin \varphi' + \cos \theta')] \sin \theta' d\theta' \\
 & + \frac{12}{\pi \sqrt{6}} \int_0^\pi d\varphi' \int_{\arctan \left(\frac{1}{\sin \varphi' + \cos \varphi'} \right)}^{\arctan \frac{1}{\cos \varphi'}} [-\cos \theta' + \sin \theta' (\sin \varphi' + \cos \varphi')] [\sin \theta' \sin \varphi' + \cos \theta'] \sin \theta' d\theta'
 \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\langle \alpha_{33}^D \rangle = \frac{2}{\pi} \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} - 2 \right) \approx 0,1295_2.$$

On voit donc que la valeur moyenne du coefficient de cisssion pour le système de glissement principal est plus de trois fois et demie supérieure à celle du coefficient de cisssion pour le système de glissement dévié. Cette dernière est même inférieure à la moitié de la plus faible valeur de α_{33} pour le système principal $((2/(3\sqrt{6}))$). Cela justifie en partie l'hypothèse simplificatrice consistant à ne prendre en compte que le système de glissement principal (sans parler de l'écrouissage latent dans le système de glissement dévié dû à l'écoulement dans le système principal).

On pourrait aussi bien calculer à partir de $P''(\alpha_{33}^D)$ la probabilité cumulée de α_{33}^D et les fonctions $[\alpha_{33}^D]$ et $[(\alpha_{33}^D)^2]$ qui interviennent directement dans le calcul de l'écoulement dans le système de glissement dévié.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] E. KRÖNER : 1958. — *Kontinuums Theorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Berlin. Springer Verlag.
- [2] G. SACHS : 1928. — *Zeit der V.D.I.*, 72, p. 734.
- [3] T. H. LIN : 1957. — *J. Mech. Phys. Solids*, 5, 143.
- [4] G.I. TAYLOR : 1938. — *J. Inst. Metals*, 62, 307.
- [5] J.F.W. BISHOP et R. HILL : 1951. — *Phil. Mag.*, 42, 414, § 1298.
- [6] J.D. ESHELBY : 1957. — *Proc. Roy. Soc.*, A 241, 376.
- [7] E. KRÖNER : 1961. — *Acta Met.*, 9, 155.
- [8] B. BUDIANSKY et T.T. WU : 1962. — *Proc. 4th cong. Appl. Mech.*, 1175.
- [9] R. HILL : 1967. — *J. Mech. Phys. Solids*, 15, 79.
- [10] Z. HASHIN : 1969. — *Int. J. Engng Sci.*, 7, 11.
- [11] A.E.H. LOVE : 1944. — *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity* (chap. IX), Dover.
- [12] J. MANDEL : 1966. — *Cours de Mécanique des Milieux continus*, Paris, Gauthiers-Villars.
- [13] SELFRIDGE et MAXWELL. — *Incomplete Elliptic Integrals of the third Kind* (tables).
- [14] P. DANTU : 1959. — *Étude Mécanique d'un milieu pulvérulent formé de sphères égales de compacité maxima*.
- [15] J. DE LACOMBE : 1939. — *Rev. Metal.*, 36, 178.
- [16] B. JAOUËL : 1957. — *J. Mech. Phys. Solids*, 5, 95.
- [17] R.P. CARREKER, J.G. LESCHEN et J.D. LUBAHN : 1948. — *A.I.M.M.E. Tech. Publ.*, n° 2477.
- [18] L. BRUN et A. ZAOUÏ : 1967. — *Cahiers Gr. Fr. Rheol.*, 5, 267.
- [19] J. ZARKA : 1968. — *Sur la viscoplasticité des métaux* (thèse).
- [20] H.D. BUI : 1969. — *Étude de l'évolution de la frontière du domaine élastique avec l'écroutissage et relation de comportement élasto-plastique des métaux cubiques* (thèse).
- [21] L. BRUN : 1965. — *Comptes rendus Ac. Sci.*, 260, 4421.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉ (français, anglais, allemand).....	265
INTRODUCTION.....	267

Chapitre I

ÉVALUATION DES CONTRAINTES INTERNES

1. Les modèles de SACHS et de TAYLOR.....	270
2. Le modèle de KRÖNER (ou modèle « self-consistent »).....	272
3. Remarques sur le modèle de KRÖNER.....	273
4. Calcul des contraintes internes lors du fluage en traction simple d'un agrégat isotrope de cristaux sphérique C.F.C. à un seul système de glissement, de comportement visco-élastique linéaire anisotrope et sans variation de volume.....	275
5. Loi d'interaction de KRÖNER modifiée.....	281
6. Remarques.....	283

*Chapitre II*COMPORTEMENT EN TRACTION SIMPLE
D'UN MODÈLE STATISTIQUE POLYCRISTALLIN (VISCOPLASTICITÉ)

I. Modèle de « SACHS-KRÖNER-BINGHAM ».....	285
A. Remarques préliminaires.....	286
B. Calcul de $[\alpha_{33}]$ et $[\alpha_{ij}^2]$	291
C. Comportement en fluage sous contrainte constante.....	296
D. Réponse à une décharge partielle en cours de fluage.....	301
E. Cas d'une mise en vibrations.....	307
F. Résumé des principaux résultats.....	309
II. Introduction d'une loi de KRÖNER modifiée.....	309
A. Mise en charge.....	310
B. Réponse à une décharge partielle en cours de fluage dans le cas où $\Sigma_2 > \frac{3\sqrt{6}}{2} \tau_0$	313
C. Conclusions.....	317

Chapitre III

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

I. Écrouissage en traction simple.....	318
1. Influence de la vitesse de déformation.....	318
2. Expression analytique des courbes d'écrouissage.....	320

ÉTUDE DE L'INFLUENCE DE LA DÉSORIENTATION DES GRAINS	371
II. Domaines de fluage en traction simple.....	321
III. Influence de variations de contraintes sur le fluage du cuivre polycristallin (traction simple).....	322
A. Étude de l'influence de vibrations.....	323
B. Étude de l'influence de surcharges et de décharges partielles en cours de fluage.	331
C. Comparaison des deux séries de résultats expérimentaux.....	335
D. Ajustement du modèle proposé aux résultats expérimentaux.....	338
IV. Utilité pratique des propriétés mécaniques propres au polycristal.....	348
CONCLUSION.....	349
ANNEXE I.....	351
ANNEXE II.....	353
ANNEXE III.....	365
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	369

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

**DISTRIBUTIONS CONTINUES DE DISLOCATIONS :
THÉORIE GÉNÉRALE
ET QUELQUES APPLICATIONS**

Vu et approuvé :

Paris, le 15 décembre 1970

**Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris**

L. GAUTHIER

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris

R. MALLET

